5 月 19 日面试相关问题的总结

杨嘉昱

2024 年 5 月 21 日

【题目 1】 L^∞ 函数是否是缓增分布?

Solution. 结论：是缓增分布。

由于 Schwartz 空间 $\mathcal{S}$ 是由一族半范数诱导的 Frechet 空间，这一族半范数可取为

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)|, \qquad N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}.$$

缓增分布 $\mathcal{S}'$ 是 Schwartz 空间的对偶空间，$f \in \mathcal{S}'$ 当且仅当存在一个常数 C 以及可以选取有限个半范数（记为 $\{(N_j,\alpha_j)\}_{j=1}^m$）使得

$$|\langle f,\phi\rangle| \leq C\sum_j \|\phi\|_{(N_j,\alpha_j)}, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

因此我们只需要找到这一常数 C 以及有限个半范数即可。

而对于 L^∞ 函数 f 而言，我们可以通过 $\phi \mapsto \int f\phi$ 将其看成一个分布。事实上我们在下式中令 $N > n$ 有：

$$|\langle f,\phi\rangle| \leq \int |f(x)\phi(x)|\,\mathrm{d}x = \int \left|\frac{f(x)}{(1+|x|)^N}\right| \cdot |(1+|x|)^N\phi(x)|\,\mathrm{d}x \leq C_N\|f\|_\infty \cdot \|\phi\|_{(N,0)}, \qquad \forall\phi \in S,$$

其中

$$C_N = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^N} < \infty.$$

依上面的讨论，L^∞ 函数确实是缓增分布。 □

【题目 2】 在 $\mathbb{R}^2$ 上计算 $g(x_1,x_2) = \exp(-x_1^2)$ 的 Fourier 变换。

Solution.

1. 首先给出几个记号：设 $\mathcal{F},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ 分别表示在 R^2 上的 Fourier 变换，对变量 x_1 的 Fourier 变换以及对变量 x_2 的 Fourier 变换。那么 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ 均是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2),\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ 上的同构。且

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1.$$

   我们只验证上述等式，同构与 $\mathcal{F}$ 的证明类似。

   首先设 $\phi \in \mathcal{S}$，那么由

$$\int |\phi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|\phi\|_{(3,0)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^3} < \infty$$

   知 ϕ 可积。从而

$$\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(\phi) = \mathcal{F}_2\left(\int \phi(x,y)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x\right) = \int\left(\int \phi(x,y)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x\right)e^{-2\pi i y\eta}\,\mathrm{d}y.$$

   由 $|\phi(x,y)e^{-2\pi i(x\xi+y\eta)}| = |\phi(x,y)|$ 知其可积，故由 Fubini 定理知

$$\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)e^{-2\pi i(x\xi+y\eta)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}(\phi).$$

   同理可证另一等式。

下面设 $T \in \mathcal{S}'$，那么直接验证有

$$\langle \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2(\phi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

即对于 $\mathcal{S}'$ 中元素有 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$。同理可证另一等式。

2. 记 $f(x) = \exp(-x^2)$，那么 $g(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot 1.$。由 $g \in L^\infty$ 知其是缓增分布。从而

$$\hat{g} = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(g) = \hat{f}(\xi) \cdot \mathcal{F}_2(\mathbb{1})(\eta).$$

因此我们只需要计算 $\mathbb{1}$ 的 Fourier 变换即可。

3. 我们用两种方法计算 $\mathbb{1}$ 的 Fourier 变换。

- **关于测度的 Fourier 变换**

  记

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

  那么这是一个有限的 Borel 测度，从而对应着一个缓增分布。其 Fourier 逆变换为

$$\delta^\vee(\xi) = \int e^{2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}\delta(x) = \mathbb{1}.$$

  容易验证 $\mathbb{1}, \delta \in \mathcal{S}'$，从而

$$\hat{\mathbb{1}} = \delta.$$

- **用 Fourier 变换的定义计算**

  考虑函数 $\phi(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$，那么

$$\phi \in L^1, \qquad \int \phi \,\mathrm{d}x = 1.$$

  因此由恒等逼近知

$$m^{n/2}\phi(\sqrt{m}x) \to \delta, \qquad \text{in } \mathcal{S}'.$$

  一方面

$$\mathcal{F}(\phi(x/\sqrt{m})) = m^{n/2}\phi(\sqrt{m}\xi) \to \delta$$

  另一方面由控制收敛定理知

$$\int \phi(x/\sqrt{m})\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int \psi(x) \exp\left(-\pi\frac{|x|^2}{m}\right) \mathrm{d}x \to \int \psi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{S}.$$

  即

$$\phi(x/\sqrt{m}) \to \mathbb{1} \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

  从而由 Fourier 变换的连续性知

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}) = \delta.$$

综上，我们计算出了 g 的 Fourier 变换

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \hat{f}(\xi) \cdot \delta(\eta).$$

□

【题目 3】 已知 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$f(0)$ 为 f 的唯一最小值点，并且

$$|x| \geq 1, \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq |f(0)| + 1.$$

且 $H_f(0) = \left(\partial_i\partial_j f(0)\right)_{i,j}$ 可逆，则

$$I_\lambda =: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$$

当 λ 趋于无穷时的渐进性态为?

Solution. 猜测答案为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \cdot \frac{g(0)}{\sqrt{\det H_f(0)}} e^{-f(0)}.$$

首先对于一个正定矩阵 A 而言

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^{\mathrm{T}}Ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \qquad \Longrightarrow h_t(x) = \frac{1}{t^n}\frac{\sqrt{\det A}}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{1}{t^2}\cdot x^{\mathrm{T}}Ax} \text{is an approximation of the identity}$$

这说明

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{n/2} \cdot \sqrt{\det A} \int e^{-\lambda x^{\mathrm{T}}Ax} g(x)\,\mathrm{d}x \to g(0)$$

而由 $f(0)$ 为 f 的唯一最小值点，因此 $H_f(0)$ 正定且 $\nabla f(0) = 0$。因此由 Taylor 展开知在 0 的一个小邻域有

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}H_f(0)x + \mathcal{O}(\|x\|^3)$$

因此我们有理由猜测当 $\lambda \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \cdot \sqrt{\det H_f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda(f(x)-f(0))} g(x)\,\mathrm{d}x \\ \approx &\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \cdot \sqrt{\det H_f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\lambda}{2}x^{\mathrm{T}}H_f(0)x} g(x)\,\mathrm{d}x \sim g(0)\end{aligned}$$

且由 Morse 引理知，存在一个微分同胚 φ 以及 $r > 0$ 使得

$$\varphi(0) = 0, \qquad f \circ \varphi(y) = f(0) + \frac{1}{2}|y|^2, \qquad y \in B(0,r) =: B_r.$$

从而

$$\begin{aligned}I_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda f(0)} \int_{B_r} g \circ \varphi(y) e^{-\frac{\lambda}{2}|y|^2} |\det H_{f\circ\varphi}(y)|^{-1/2}\,\mathrm{d}y + \int_{B_r^c} e^{-\lambda f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &=: I_\lambda^1 + I_\lambda^2.\end{aligned}$$

其中由正定矩阵 A 的恒等逼近易得关于 I_λ^1 的估计：

$$\begin{aligned}I_\lambda^1 &\sim e^{-\lambda f(0)} g \circ \varphi(0) |\det H_{f\circ\varphi}(0)|^{-1/2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \\ &= \frac{g(0)}{\sqrt{\det H_f(0)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\lambda f(0)}\end{aligned}$$

而对于 I_λ^2 有

$$\lambda^{n/2} e^{\lambda f(0)} I_\lambda^2 = \lambda^{n/2} \int_{B_r^c} e^{-\lambda(f(x)-f(0))} g(x)\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x) - f(0)$ 有正的下界，由控制收敛定理知上式趋于 0。

综上得证。 □