多元数据分析第二次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 4 月 2 日

【题目 1】 设 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 均为 p 维随机向量，已知

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{2p}\left(\begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2 & \Sigma_1 \end{pmatrix}\right)$$

其中 $\mu^{(i)}$ 为 p 维向量，Σ_i 是 p 阶矩阵

1. 证明 $X^{(1)} + X^{(2)}$ 和 $X^{(1)} - X^{(2)}$ 相互独立
2. 求 $X^{(1)} + X^{(2)}$ 和 $X^{(1)} - X^{(2)}$ 的分布

Solution.

1. 由于

$$Y = \begin{pmatrix} X^{(1)} + X^{(2)} \\ X^{(1)} - X^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} := CX$$

故

$$Y \sim \mathcal{N}_{2p}\left(\mu, \tilde{\Sigma}\right)$$

其中

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} + \mu^{(2)} \\ \mu^{(1)} - \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Sigma} = C\Sigma C^{\mathrm{T}} = 2\begin{pmatrix} \Sigma_1 + \Sigma_2 & O \\ O & \Sigma_1 - \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

由于

$$\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{21} = O$$

从而 $X^{(1)} + X^{(2)}$ 和 $X^{(1)} - X^{(2)}$ 相互独立.

2. 由于

$$X^{(1)} + X^{(2)} = \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix} Y \qquad X^{(1)} - X^{(2)} = \begin{pmatrix} O & I \end{pmatrix} Y$$

故由第一问的结论知

$$X^{(1)} + X^{(2)} \sim \mathcal{N}\left(\mu^{(1)} + \mu^{(2)}, 2\Sigma_1 + 2\Sigma_2\right)$$
$$X^{(1)} - X^{(2)} \sim \mathcal{N}\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}, 2\Sigma_1 - 2\Sigma_2\right)$$

□

【题目 2】 设 $X \sim \mathcal{N}_3(\mu, \Sigma)$，其中

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^{\mathrm{T}}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (0 < \rho < 1).$$

1. 试求条件分布 $(X_1, X_2 | X_3)$ 和 $(X_1 | X_2, X_3)$

2. 给定 $X_3 = x_3$ 时，试写出 X_1, X_2 的条件协方差。

Solution.

1. 记

$$\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{12} = \Sigma_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{22} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\mu_{1,2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\begin{pmatrix} x_3 - \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \rho(x_3 - \mu_3) \\ \mu_2 + \rho(x_2 - \mu_3) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11,2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \begin{pmatrix} 1-\rho^2 & \rho-\rho^2 \\ \rho-\rho^2 & 1-\rho^2 \end{pmatrix} = (1-\rho)\begin{pmatrix} 1+\rho & \rho \\ \rho & 1+\rho \end{pmatrix}$$

从而 $(X_1, X_2|X_3)$ 的条件分布为

$$(X_1, X_2|X_3) \sim \mathcal{N}\left(\mu_{1,2}, \Sigma_{11,2}\right)$$

同理，记

$$\tilde{\Sigma}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Sigma}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\tilde{\mu}_{1,2} = \mu_1 + \tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\begin{pmatrix} x_2 - \mu_2 \\ x_3 - \mu_3 \end{pmatrix} = \mu_1 + \frac{\rho}{\rho+1}(-x_2 + \mu_2 + x_3 - \mu_3)$$

$$\tilde{\Sigma}_{11,2} = \tilde{\Sigma}_{11} - \tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\tilde{\Sigma}_{21} = 1 - \frac{2x^2}{x+1}$$

故

$$(X_1|X_2, X_3) \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \frac{\rho}{\rho+1}(-x_2 + \mu_2 + x_3 - \mu_3), 1 - \frac{2x^2}{x+1}\right)$$

2. 由于 $(X_1, X_2|X_3)$ 的方差矩阵为

$$(1-\rho)\begin{pmatrix} 1+\rho & \rho \\ \rho & 1+\rho \end{pmatrix}$$

故 X_1, X_2 的条件协方差为

$$\rho(1-\rho).$$

□

【题目 3】 设 $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$X_2 = \begin{cases} -X_1 & -1 \le X_1 \le 1 \\ X_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明

1. $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. (X_1, X_2) 的联合分布不是正态分布

Solution.

1. 设 X_2 的分布函数为 F，密度函数为 p，则当 $x < -1$ 时

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t.$$

当 $-1 \le x \le 1$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X_1 \le -1) + \mathbb{P}(-1 < -X_1 \le x) \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t + \int_{-x}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

当 $x > 1$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X_1 \le -x) + \mathbb{P}(-1 \le -X_1 \le 1) + \mathbb{P}(X_1 \le x) + \mathbb{P}(1 < x_1 \le x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

综上：

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

故 $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. 令 $Y = X_1 - X_2$，则

$$\mathbb{P}(|Y| = 0) = \mathbb{P}(|X_1| > 1) = 2\Phi(-1) > 0$$

这说明

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

不是正态分布，故 (X_1, X_2) 也不是正态分布。

$\square$

【题目 4】 设 $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$，$A$ 为对称矩阵，证明

1. $\mathbb{E}\left(XX^{\mathrm{T}}\right) = \Sigma + \mu\mu^{\mathrm{T}}$
2. $\mathbb{E}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) = \mathrm{tr}(\Sigma A) + \mu^{\mathrm{T}}A\mu$
3. 若 $\mu = a\mathbb{1}_p$, $A = I_p - \frac{1}{p}\mathbb{1}_p\mathbb{1}_p^{\mathrm{T}}$, $\Sigma = \sigma^2 I_p$，证明

$$\mathbb{E}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) = \sigma^2(p-1).$$

其中 $\mathbb{1} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Proof.

1. 记 $\mathcal{O} \sim \mathcal{N}_p(0, \Sigma)$，则

$$X = \mu + \mathcal{O}.$$

从而

$$\mathbb{E}\left(XX^{\mathrm{T}}\right) = \mathbb{E}\left(\mu\mu^{\mathrm{T}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathcal{O}\mu^{\mathrm{T}}\right) + \mathbb{E}\left(\mu\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathcal{O}\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\right)$$

而

$$\mathbb{E}\left(\mu\mu^{\mathrm{T}}\right) = \mu\mu^{\mathrm{T}} \qquad \mathbb{E}\mathcal{O} = 0, \qquad \mathbb{E}\left(\mathcal{O}\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\mathcal{O} = \Sigma,$$

故

$$\mathbb{E}\left(XX^{\mathrm{T}}\right) = \Sigma + \mu\mu^{\mathrm{T}}$$

2. 与第一问的记号相同

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) &= \mathbb{E}\left(\mu^{\mathrm{T}}A\mu\right) + \mathbb{E}\left(\mathcal{O}^{\mathrm{T}}A\mu\right) + \mathbb{E}\left(\mu^{\mathrm{T}}A\mathcal{O}\right) + \mathbb{E}\left(\mathcal{O}^{\mathrm{T}}A\mathcal{O}\right) \\ &= \mu^{\mathrm{T}}A\mu + \mathbb{E}\left(\mathcal{O}^{\mathrm{T}}A\mathcal{O}\right) \end{aligned}$$

记

$$A=(a_{ij}),\qquad \Sigma=(\sigma_{ij}),\qquad \mathcal{O}^{\mathrm{T}}=(\xi_1,\cdots,\xi_p).$$

则

$$\mathcal{O}=\sum \xi_i e_i\qquad \sigma_{ij}=\mathbb{E}(\xi_i\cdot\xi_j),\qquad a_{ij}=e_i^{\mathrm{T}}Ae_j.$$

其中 e_i 为 $\mathbb{R}^p$ 中的标准单位向量。从而由 A 对称知 $a_{ij}=a_{ji}$，故有

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{O}^{\mathrm{T}}A\mathcal{O}\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{i,j}\xi_i\xi_je_i^{\mathrm{T}}Ae_j\right)=\sum_{i,j}\sigma_{ij}a_{ij}=\sum_{i,j}\sigma_{ij}a_{ji}=\mathrm{tr}(\Sigma A).$$

即 $\mathbb{E}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right)=\mathrm{tr}(\Sigma A)+\mu^{\mathrm{T}}A\mu$.

3. 直接计算得：

$$\frac{1}{a^2}\mu^{\mathrm{T}}A\mu=\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\left(I-\frac{1}{p}\mathbb{1}\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\right)\mathbb{1}=\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathbb{1}-\frac{1}{p}\left(\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathbb{1}\right)^2=p-\frac{1}{p}\cdot p^2=0$$

$$\frac{p}{\sigma^2}\Sigma A=pI-\mathbb{1}\mathbb{1}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}p&&&\\&p&&\\&&\ddots&\\&&&p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

从而

$$\mathrm{tr}(\Sigma A)=\frac{\sigma^2}{p}\left(\mathrm{tr}(pI)-\mathrm{tr}\left(\mathbb{1}\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\right)\right)=\frac{\sigma^2}{p}\left(p^2-p\right)=\sigma^2(p-1).$$

故

$$\mathbb{E}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right)=\mu^{\mathrm{T}}A\mu+\mathrm{tr}(\Sigma A)=\sigma^2(p-1).$$

□

【题目 5】 设 $X\sim\mathcal{N}_n\left(\mu,\sigma^2I_n\right)$，$A$ 阶对称幂等矩阵，且 $\mathrm{rank}(A)=r\ (r\le n)$，证明

$$\frac{1}{\sigma^2}X^{\mathrm{T}}AX\sim\chi^2(r,\delta),\qquad \delta=\frac{1}{\sigma^2}\mu^{\mathrm{T}}A\mu.$$

Proof. 由于 A 为对称矩阵，$\mathrm{rank}(A)=r$，故存在 $\mathcal{O}\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 使得

$$A=\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\Lambda\mathcal{O},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}I_r&\\&O\end{pmatrix}$$

令 $Y=\Lambda\mathcal{O}X/\sigma$，则

$$Y\sim\mathcal{N}_r\left(\frac{1}{\sigma}\Lambda\mathcal{O}\mu,\mathcal{O}\Lambda I_n\Lambda^{\mathrm{T}}\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\right)=\mathcal{N}_r\left(\frac{1}{\sigma}\Lambda\mathcal{O}\mu,I_r\right).$$

从而

$$\frac{1}{\sigma^2}X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}Y=\sum_{i=1}^{r}Y_i\sim\chi^2(r,\delta)$$

其中

$$\delta=\left(\frac{1}{\sigma}\Lambda\mathcal{O}\mu\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\sigma}\Lambda\mathcal{O}\mu\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mu^{\mathrm{T}}\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda\mathcal{O}\mu=\frac{1}{\sigma^2}\mu^{\mathrm{T}}A\mu$$

□

【题目 6】 设 $X\sim\mathcal{N}_n\left(\mu,\sigma^2I_n\right)$，$A,B$ 为 n 阶对称矩阵，若 $AB=O$，证明 $X^{\mathrm{T}}AX$ 与 $X^{\mathrm{T}}BX$ 相互独立。

Proof. 由于 A 为 n 阶对称矩阵，故存在 $P \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 使得

$$A = P^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} D_r & \\ & O \end{pmatrix} P, \qquad D_r = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r).$$

由 $AB = O$ 知

$$ABP^{\mathrm{T}} = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} D_r & \\ & O \end{pmatrix} PBP^{\mathrm{T}} = O \quad \Longrightarrow \quad PBP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} O & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

而 PBP^{T} 是对称矩阵，从而

$$PBP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} O & \\ & D_{n-r} \end{pmatrix}.$$

令 $Y = PX$，则

$$Y \sim \mathcal{N}_n\left(P\mu, \sigma^2 P I_n P^{\mathrm{T}}\right) = \mathcal{N}_n\left(P\mu, \sigma^2 I_n\right)$$

从而 $Y_1, \cdots, Y_n$ 相互独立，且

$$X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} D_r & \\ & O \end{pmatrix} Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i^2.$$

只与 $\{Y_j\}_{j=1}^{r}$ 有关，

$$X^{\mathrm{T}}BX = Y^{\mathrm{T}}PBP^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} O & \\ & D_{n-r} \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} Y_{r+1} & \cdots & Y_n \end{pmatrix} D_{n-r} \begin{pmatrix} Y_{r+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

只与 $\{Y_j\}_{j=r+1}^{n}$ 有关。从而 $X^{\mathrm{T}}AX, X^{\mathrm{T}}BX$ 相互独立 □

【题目 7】 设 $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, $\Sigma > 0$, A, B 为 p 阶对称矩阵，证明

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}A(X-\mu), (X-\mu)^{\mathrm{T}}B(X-\mu)\text{相互独立} \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma A \Sigma B \Sigma = O.$$

Proof. 记

$$M = \Sigma^{-1/2}(X-\mu) \sim \mathcal{N}_p(0, I_p), \qquad C = \Sigma^{1/2} A \Sigma^{1/2}, \qquad D = \Sigma^{1/2} B \Sigma^{1/2}$$

则有

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}A(X-\mu) = \left((X-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1/2}\right)\left(\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}\right)\left(\Sigma^{-1/2}(X-\mu)\right) = M^{\mathrm{T}}CM.$$

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}B(X-\mu) = \left((X-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1/2}\right)\left(\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}\right)\left(\Sigma^{-1/2}(X-\mu)\right) = M^{\mathrm{T}}DM.$$

从而

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}A(X-\mu), (X-\mu)^{\mathrm{T}}B(X-\mu)\text{相互独立} \quad \Longleftrightarrow \quad M^{\mathrm{T}}CM, M^{\mathrm{T}}DM\text{相互独立}.$$

$$O = \Sigma A \Sigma B \Sigma = \Sigma^{1/2} C D \Sigma^{1/2} \quad \Longleftrightarrow \quad O = CD$$

故只需要证明

$$M^{\mathrm{T}}CM, M^{\mathrm{T}}DM\text{相互独立} \quad \Longleftrightarrow \quad CD = O$$

即可。而充分性由上题立即得到，下证必要性。

首先来计算 $M^{\mathrm{T}}AM$ 的特征函数。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{itM^{\mathrm{T}}AM} &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{itm^{\mathrm{T}}Am} \exp\left(-\frac{1}{2}m^{\mathrm{T}}m\right) \mathrm{d}m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\frac{1}{2}m^{\mathrm{T}}(I - 2itA)\right) \mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{|I-2itA|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{|I-2itA|^{1/2}}\end{aligned}$$

由于 $|I-2itA|^{1/2}$ 是关于 t 的 p 次多项式，故之多有 n 个根，即在这 n 个根之外 $I-2itA$ 对称非退化，从而正定。因此上述的换元是合理的。同理

$$\mathbb{E}e^{itM^{\mathrm{T}}BM}=\frac{1}{|I-2itB|^{1/2}}.$$

由 $M^{\mathrm{T}}AM, M^{\mathrm{T}}BM$ 相互独立知

$$\mathbb{E}e^{itM^{\mathrm{T}}BM}\cdot\mathbb{E}e^{itM^{\mathrm{T}}BM}=\mathbb{E}e^{itM^{\mathrm{T}}(A+B)M}.$$

即

$$|I-2it(A+B)|=|I-2itA|\cdot|I-2itB|=|I-2it(A+B)-4t^2AB|$$

由 t 的任意性知 $AB=O$.

□

【题目 8】 设 $X_{(\alpha)}\sim\mathcal{N}_p(0,\Sigma)$ 相互独立，其中

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

且已知

$$W=\sum_{\alpha=1}^{n}X_{(\alpha)}X_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{pmatrix}$$

证明:

1. $W_{11}\sim W_r(n,\Sigma_{11}), W_{22}\sim W_{p-r}(n,\Sigma_{22})$
2. 当 $\Sigma_{12}=O$ 时，W_{11},W_{22} 独立.

Proof. 令

$$Y_{(\alpha)}=\begin{pmatrix}I_r & O\end{pmatrix}X_{(\alpha)}\sim\mathcal{N}_r(0,\Sigma_{11}),\qquad Z_{(\alpha)}=\begin{pmatrix}O & I_{p-r}\end{pmatrix}X_{(\alpha)}\sim\mathcal{N}_{p-r}(0,\Sigma_{22}).$$

则

$$W_{11}=\begin{pmatrix}I_r & O\end{pmatrix}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}X_{(\alpha)}X_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}I_r\\ O\end{pmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{n}Y_{(\alpha)}Y_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}\sim W_r(n,\Sigma_{11})$$

$$W_{22}=\begin{pmatrix}O & I_{p-r}\end{pmatrix}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}X_{(\alpha)}X_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}O\\ I_{p-r}\end{pmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{n}Z_{(\alpha)}Z_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}\sim W_{p-r}(n,\Sigma_{22})$$

若 $\Sigma_{12}=O$ 则 $Y_{(\alpha)},Z_{(\alpha)}$ 相互独立，从而

$$W_{11}=\sum_{\alpha=1}^{n}Y_{(\alpha)}Y_{(\alpha)}^{\mathrm{T}},\ W_{22}=\sum_{\alpha=1}^{n}Z_{(\alpha)}Z_{(\alpha)}^{\mathrm{T}}$$

相互独立。

□

【题目 9】 对单个 p 元正态总体 $\mathcal{N}_p(\mu,\Sigma)$ 的均值向量的检验问题，试用似然比原理导出检验 $H_0:\mu=\mu_0(\Sigma_0$ 已知) 的似然比统计量及其分布.

Solution. 设 $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ 是来自 $\mathcal{N}_p(\mu,\Sigma)$ 的独立同分布样本。则其联合密度函数为

$$\begin{aligned}f(X)&=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X_j-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X_j-\mu)\right)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X_j-\mu)\right)\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X_j-\mu)=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X_j-\overline{X}+\overline{X}-\mu)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X_j-\overline{X})+\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\overline{X}-\mu).$$

记

$$\Theta=\{\mu:\mu\in\mathbb{R}\},\qquad \Theta_0=\{\mu:\mu=\mu_0\}$$

由于均值 μ 的极大似然估计为

$$\hat{\mu}=\overline{X}$$

故

$$\Lambda=\frac{\max_{\mu\in\Theta_0}L(X;\mu)}{\max_{\mu\in\Theta}L(X;\mu)}=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}-\mu_0)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\overline{X}-\mu_0)\right)$$

拒绝域形如

$$\{\Lambda\leq\lambda_\alpha\}\Longleftrightarrow\left\{-\frac{1}{2}T_0\leq\log\lambda_\alpha\right\}\Longleftrightarrow\{T_0\geq T_\alpha\}$$

□

【题目 10】 设 $X_{(\alpha)}$ 为来自正态总体 $X\sim\mathcal{N}_p\left(\mu^{(1)},\Sigma_1\right)$ 的随机样本，$Y_{(\alpha)}$ 是来自正态总体 $Y\sim\mathcal{N}_p\left(\mu^{(2)},\Sigma_2\right)$ 的随机样本，且相互独立，Σ 未知. 设 $n<m$ 利用 $X_{(i)},Y_{(j)}$ 构造新总体 Z 的样本 $Z_{(i)}$，令

$$Z_{(i)}=X_{(i)}-\sqrt{\frac{n}{m}}Y_{(i)}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{(j)}$$

证明：$Z_{(i)}\sim\mathcal{N}_p\left(\mu^{(1)}-\mu^{(2)},\Sigma_1+\frac{n}{m}\Sigma_2\right)$ 且相互独立。

Proof.

$$\mathbb{E}Z_{(j)}=\mathbb{E}\left(X_{(i)}-\sqrt{\frac{n}{m}}Y_{(i)}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{(j)}\right)$$
$$=\mu^{(1)}-\sqrt{\frac{n}{m}}\mu^{(2)}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\cdot n\cdot\mu^{(2)}-\frac{1}{m}\cdot m\cdot\mu^{(2)}=\mu^{(1)}-\mu^{(2)}.$$

记

$$P_{(i)}=-\sqrt{\frac{n}{m}}Y_{(i)}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{(j)}$$

则

$$\mathrm{Cov}\left(P_{(i)},P_{(j)}\right)=\frac{n}{m}\mathrm{Cov}\left(Y_{(i)},Y_{(j)}\right)+\left(\mathrm{Cov}\left(P_{(i)},P_{(j)}\right)-\frac{n}{m}\mathrm{Cov}\left(Y_{(i)},Y_{(j)}\right)\right)$$

而

$$\mathrm{Cov}\left(P_{(i)},P_{(j)}\right)-\frac{n}{m}\mathrm{Cov}\left(Y_{(i)},Y_{(j)}\right)$$
$$=-\sqrt{\frac{n}{m}}\mathrm{Cov}\left(Y_{(i)},\frac{1}{\sqrt{nm}}Y_{(i)}-\frac{1}{m}Y_{(i)}\right)-\sqrt{\frac{n}{m}}\mathrm{Cov}\left(Y_{(j)},\frac{1}{\sqrt{nm}}Y_{(j)}-\frac{1}{m}Y_{(j)}\right)$$
$$+\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{(j)},\frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{(j)}\right)$$
$$=-2\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{nm}}-\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(Y_{(i)}\right)$$
$$+\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{nm}}-\frac{1}{m}\right)\sum_{j=1}^{n}Y_{(j)}\right)+\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{m}Y_{(j)}\right)$$
$$=\left(-\frac{2}{m}+\frac{2}{m}\sqrt{\frac{n}{m}}+\frac{n}{nm}-\frac{2}{m}\frac{n}{\sqrt{nm}}+\frac{n}{m^2}+\frac{m-n}{m^2}\right)\Sigma_2=O$$

从而

$$\mathrm{Cov}\left(P_{(i)}, P_{(j)}\right) = \frac{n}{m}\mathrm{Cov}\left(Y_{(i)}, Y_{(j)}\right) = \frac{n}{m}\mathbb{V}\mathrm{ar}\, Y\delta_{ij} = \frac{n}{m}\Sigma_2\delta_{ij}$$

故

$$\mathrm{Cov}\left(Z_{(i)}, Z_{(j)}\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_{(i)}, X_{(j)}\right) + \mathrm{Cov}\left(P_{(i)}, P_{(j)}\right) = \Sigma_1\delta_{ij} + \frac{n}{m}\Sigma_2\delta_{ij}$$

从而 $Z_{(i)}$ 之间相互独立，且方差为 $\Sigma_1 + \frac{n}{m}\Sigma_2$，即

$$Z_{(i)} \sim \mathcal{N}_p\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}, \Sigma_1 + \frac{n}{m}\Sigma_2\right).$$

□

【题目 11】 为了研究日、美两国在华投资企业对中国经营环境的评价是否存在差异，今从两国在华企业中各抽取 10 家，让其对中国的政治、经济、法律、文化等环境进行打分。

Solution. 记日、美两国的样本分别为 X_i, Y_i，考虑

$$Z_i = X_i - Y_i$$

则原假设与备择假设分别为

$$H_0 : \mu_0 = 0 \qquad \text{vs} \qquad \mu_0 \neq 0.$$

考虑统计量

$$F = \frac{(n-1)-p+1}{(n-1)p}\bar{Z}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n-1}A\right)^{-1}\bar{Z} = \frac{1}{6}\bar{Z}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{9}A\right)^{-1}\bar{Z} \sim F(p, n-p) = F(4, 6).$$

带入数值计算得检验 p 值为

$$p = 0.03644468$$

故在显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 的前提下拒绝原假设。代码如下：

```r
a = read.table("R/2_7.txt")

X <- matrix(unlist(a[1:10,]), ncol = 4) - matrix(unlist(a[11:20,]), ncol = 4)
X_bar = colMeans(X)
F <- 10 %*% t(X_bar) %*% solve(cov(X)) %*% (X_bar) * (9-4+1)/(9*4)

p_value <- 1 - pf(F, 4, 6)
print(p_value)

```

□