XJTU 实变函数试题（2021 级）

杨嘉昱

【题目 1】 判断题

1. Cantor 集的基数为连续基数
2. 可数个闭集的并称为 G_δ 集
3. 若 f 单调，那么其不连续点是不可数的
4. E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的两个集合，则 $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$
5. 若 A, B 是可测集，则 $A \backslash B$ 不可测
6. $\{E_k\}$ 是递减集列，则 $m(\lim E_k) = \lim m(E_k)$
7. 若 f 在 E 上连续，则 f 可测
8. 设 $f_k, f < +\infty$ a.e. 且 $f_k \to f$ a.e. 那么 f_k 依测度收敛于 f
9. $\{f_k\}$ 在 E 上可积，则 $\displaystyle\int_E \liminf f_k \leq \liminf \int_E f_k$
10. 若 f 在 $[a, b]$ 上绝对连续，那么 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处可微

【题目 2】 E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集，证明：$\forall\, \varepsilon > 0$ 存在开集 G 使得

$$E \subseteq G \qquad m(G \backslash E) < \varepsilon.$$

【题目 3】 E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集，$m(E) < +\infty$，$f_k \to f$ in measure，g 可测且 $g < +\infty$ a.e. 证明

$$f_k g \to f g \qquad \text{in measure.}$$

【题目 4】 f, f_k 在 E 上非负可积，$f_k \to f$ in measure, 若

$$\lim \int_E f_k = \int_E f.$$

证明，对于任意 E 的可测子集 e 有

$$\lim \int_e f_k = \int_e f.$$

【题目 5】 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，$m(E) < +\infty$，$\{f_k\} \subseteq L(E)$ 并且满足：$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta$，若 $m(e) < \delta$ 则

$$\int_e |f_n| < \varepsilon, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

证明：若 $f_k \to f$ in measure，那么

$$\lim \int_E f_k = \int_E f.$$

【题目 6】 证明在 $[a, b]$ 上的绝对连续函数也是有界变差函数。

【题目 7】 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，$1 < p, q < +\infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$，若 $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$，证明

$$\|fg\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} \cdot \|g\|_{L^q(E)}.$$