

度量空间

定义: X 非空集合, 称 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为 X 的一个度量若它满足

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall y, x \in X$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$

称 $d(x, y)$ 为 x 到 y 的距离, 称 (X, d) 为度量空间.

例: $X = \mathbb{R}^n$

$$d_1(x, y) = \left(\sum |x_i - y_i| \right)^2$$

$$d_2(x, y) = \sum |x_i - y_i|$$

d 为 $\mathbb{R}$ 上的度量

例: X 为非空集合定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

则 d 为 X 上的离散度量.

例: $\ell^\infty = \{(x_n) : \sup |x_n| < \infty\}$.

$$d(x, y) = \sup |x_i - y_i| \quad \forall x, y \in \ell^\infty$$

定义: 设 (X, d) 为度量空间, $(x_n) \subset X, x_0 \in X$ 若

$$\lim d(x_n, x) = 0$$

则称 (x_n) 依度量 d 收敛于 x , 记为 $\lim x_n \stackrel{d}{=} x$

定义: 设 X 为度量空间, $A \subset X$, 称 A 有界若 $\exists x_0 \in X$

CUE

$M > 0$ 使得

$$d(x, x_0) \leq M \quad \forall x \in A.$$

命题: 若 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 则极限必唯一, $\{x_n\}$ 有界.

例: $\mathbb{R}^n$ 中元素收敛 $\Leftrightarrow$ 坐标收敛.

证: 只要注意到

$$\sup |x_i - y_i| \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} \sup |x_i - y_i|$$

$$\text{其中 } d(x, y) = \left(\sum |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

例: ℓ^∞ 中元素收敛 $\Leftrightarrow$ 坐标一致收敛.

$$d(x, y) = \sup |x_j - y_j|$$

$$\text{若 } d(x^{(n)}, x) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{则 } \sup |x_j^{(n)} - x_j| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \quad \forall n \geq N$$

$$\sup |x_j^{(n)} - x_j| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |x_j^{(n)} - x_j| < \varepsilon \quad \forall j \geq 1 \quad n \geq N.$$

例: 几个度量空间的例子.

$$\textcircled{1} \ell^p: (1 \leq p < \infty).$$

$$d(x, y) = \left(\sum |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

$$\textcircled{2} L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ 可测} : \text{ess sup } |u| < \infty\}.$$

$$d(x, y) = \text{ess sup } |x - y|.$$

$$\textcircled{3} \text{ 所有序列空间 } l_1 = \{x: \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \text{ 为数列}\}.$$

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

Summary

CUE

设 (X, d) 为度量空间, $x_0 \in X, r > 0$, 记

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$$

$$A \subset X, x_0 \in X, \text{ 若 } \exists r > 0 \text{ 使得}$$

$$B(x_0, r) \subset A$$

则称 x_0 为 A 的内点, A 的内点全体记为 A 的内部

记 A° , 若 $A^\circ = A$, 则称 A 为开集.

$$A \subset X, x_0 \in X \text{ 若 } \forall \varepsilon > 0,$$

$$(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

则称 x_0 为 A 的聚点. A 的全部聚点称为 A 的导集, 记为 A' .

称 $A \cup A' = \bar{A}$ 为 A 的闭包. 若 $A = \bar{A}$, 称 A 为闭集.

定理: X 为度量空间, $A \subset X, x_0 \in X$, 则

$$\textcircled{1} A \text{ closed} \Leftrightarrow A^c = X \setminus A \text{ open}.$$

$$\textcircled{2} x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A, d(x_n, x_0) \rightarrow 0.$$

Summary

可分性与完备性.

定义: 设 X 为度量空间, $A, B \subset X$, 称 A 在 B 中稠密若 $B \subset \bar{A}$. 称 A 为疏集 (无处稠密集), 若 A 不在 X 中任何非空开集 O 中稠密.

Remark.

① 若 A 在 B 中稠密, 则 $\forall x \in B, \exists \{x_n\} \subset A$ 使得 $x_n \rightarrow x$.

② A 疏集, 则 $\forall O \subset X$ open, 由 A 不在 O 中稠密: $O \setminus \bar{A} \neq \emptyset$, 但 $\bar{A}$ 闭, 故

$$O \setminus \bar{A} \text{ open.}$$

$\Rightarrow \exists x_0 \in O, r > 0$ 使得

$$B(x_0, r) \subset O \setminus \bar{A}$$

$$\text{即 } A \cap B(x_0, r) = \emptyset.$$

定理: A 疏集 $\Leftrightarrow \bar{A}^\circ = \emptyset$

Proof. " $\Leftarrow$ " 由于 $\bar{A}^\circ = \emptyset$, 故 $\bar{A}$ 中不包含任一球.

$\forall O \subset X$ open, $\exists B(x_0, r_0) \subset O$, 但 $B(x_0, r_0) \not\subset \bar{A}$.

故 $\exists x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus \bar{A}$, 但 $\bar{A}$ closed, 故

$\exists \varepsilon_1 > 0$ 使得

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset \bar{A}^c$$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \frac{1}{2}(r_0 - d(x_0, x_1))\}$, 则

$$B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, r_0) \subset O \text{ 且}$$

$$B(x_1, \varepsilon) \cap \bar{A} = \emptyset$$

这说明 $\bar{A}$ 不在 O 中稠密.

" $\Rightarrow$ " 反设 $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$, 则 $\exists B(x_0, r_0) \subset \bar{A}^\circ$

这说明 A 在开集 $B(x_0, r_0)$ 中稠密, 矛盾.

推论: A 疏集 $\Rightarrow \bar{A}$ 也为疏集

定义: 度量空间 X 可分若 X 有可数稠密子集

例: $\mathbb{R}^n, \ell^p, L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) (S) 可分.

$\ell^\infty, L^\infty(\Omega)$ 不可分

Proof. $\ell^p = \{x: \sum |x_j|^p < \infty\}$ 可分 ($1 \leq p < \infty$). 可分.

记 $A_n = \{r = \{r_j\}: r_j \in \mathbb{Q}, r_j = 0 \ \forall j \geq n+1\}$

则 $\bigcup A_n = A$ 可数

$\forall x \in \ell^p, \exists \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon_2.$$

$\forall 1 \leq i \leq n, \exists r_j \in \mathbb{Q}$ 使得

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j - r_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_2.$$

$\Rightarrow$ 令 $r = (r_1, \dots, r_n, 0, \dots) \in A$, 则

$$d(x, r) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow A$ 在 ℓ^p 中稠密

定理: X 为度量空间, B 为 X 不可数子集, 若存在 $\varepsilon_0 > 0$

CUE

使得 $\forall x, y, x, y \in B$ 有

$$d(x, y) \geq \varepsilon_0$$

则 X 不可分.Proof. 反设 X 可分, 则存在稠密子集 A , 使得从而 $\forall x, y \in B, x \neq y$ 有

$$\begin{cases} \exists w_x \in A, d(x, w_x) < \varepsilon_0/3 \\ \exists w_y \in A, d(y, w_y) < \varepsilon_0/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \leq d(x, y) \leq d(x, w_x) + d(y, w_y) + d(w_x, w_y) \leq \frac{2\varepsilon_0}{3} + d(w_x, w_y)$$

$$\Rightarrow w_x \neq w_y, \text{ 故}$$

$$W: B \rightarrow A$$

$$x \mapsto w_x$$

为单射, 这说明 $\#B \leq \#A$, 矛盾.定理: ℓ^∞, ℓ^1 不可分Proof. 考虑集合

$$B = \{x : x = (x_j), x_j = 0 \text{ 或 } 1\}$$

则 B 与 $[0, 1]$ 等势, 从而不可数. 并且 $\forall x, y \in B$ $x \neq y$, 有

$$d(x, y) = \sup |x_j - y_j| = 1$$

故由引理知 ℓ^∞ 不可分.

Summary

CUE

考虑集合 $\mathcal{B} = \{[-a, a]^n : a \in \mathbb{R}\}$ 以及

$$B = \{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}$$

$$\text{则 } \text{Card } B = \text{Card } \mathcal{B} = \text{Card } \mathbb{R}.$$

从而 $B \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 不可数, 并且 $\forall f, g \in B, f \neq g$ 则

$$d(f, g) = \text{ess sup } |f(x) - g(x)| = 1$$

~~其中~~ 由引理知: $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 不可分.定义: 设 (X, d) 为度量空间, 称 $\{x_n\}$ 为 (X, d) 中 Cauchy 列, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

命题: Cauchy 列有界.

命题: 若 Cauchy $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_j}\}$ 在 X 中收敛, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛.定义: 称度量空间 (X, d) 完备, 若 Cauchy 列均收敛.例: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \ell^p, \ell^p$ ($1 \leq p < \infty$), (s) 均为完备度量空间.定义: 设 $\{F_j\}$ 为度量空间 (X, d) 中的一列非空闭集, 若它满足:

$$\text{是: } \textcircled{1} F_{j+1} \subset F_j \quad j \geq 1$$

$$\textcircled{2} \text{diam}(F_j) \rightarrow 0.$$

则称 $\{F_j\}$ 为 X 中的闭集套.定理: 设 $\{F_j\}$ 为度量空间 X 中的闭集套, 则

$$X \text{ 完备} \Leftrightarrow \exists! x \in X \text{ s.t. } x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$$

Summary

CUE

Proof: $\Rightarrow$ $\forall j \geq 1$, 取 $x_j \in F_j$, 则 $\{x_j\}$ 为 Cauchy

列. 事实上: 由 $\text{diam}(F_j) \rightarrow 0$ 知:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\text{diam}(F_j) < \varepsilon \quad \forall j \geq N$$

从而 $\forall m, n \geq N$

$$x_m, x_n \in F_N$$

$$\Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

$\Rightarrow$ 由 X 完备 $\Rightarrow \exists x, x_n \rightarrow x$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \cap F_N$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \{x$

$\forall N \geq 1, \{x_n\}_{n=N}^\infty \subset F_N$, 收敛于 x

故 $x \in \overline{F_N} = F_N$ (F_N closed)

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^\infty F_j$$

设 $y \in \bigcap_{j=1}^\infty F_j$, 则 $\forall j \geq 1$,

$$d(x, y) \leq \text{diam}(F_j) \rightarrow 0 \text{ as } j \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow d(x, y) = 0$, 从而 $x = y$.

" $\Leftarrow$ " $\forall j \geq 1$, 令 $F_j = \{x_k | k \geq j\}$ 为闭集, 且显然

$$F_{j+1} \subset F_j \quad \forall j \geq 1$$

$$\Rightarrow \exists! x \quad x \in \bigcap F_j$$

Summary

CUE

证②. 设 $\{x_n\}$ Cauchy, 则可选取子列使得

$$d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) < \frac{1}{2^j}$$

令 $F_j = B(x_{n_j}, \frac{1}{2^{j-1}})$, 则 F_j 为 X 中

闭集, 并且 $\text{diam}(F_j) \rightarrow 0$

$$\forall x \in F_{j+1}, d(x, x_{n_{j+1}}) < \frac{1}{2^j}$$

但 $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) < \frac{1}{2^j}$, 从而

$$d(x, x_{n_j}) < \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$\Rightarrow x \in F_j$$

这说明 $F_{j+1} \subset F_j$

从而 $\{F_j\}$ 为闭集套, $\Rightarrow$ 存在唯一 $x \in X$

使得 $\{x\} = \bigcap F_j$

$\Rightarrow d(x, x_{n_j}) \rightarrow 0$, 故 $\{x_n\}$ 有一子列收敛

推出 $\{x_n\}$ 收敛.

定义: 设 (X, d) 为度量空间, 称 $A \subset X$ 为第一纲的, 若 A 可

以表示为可数个疏集的并, 否则称为第二纲的.

定理: 完备度量空间为第二纲

证. 分两步来证明.

① 设 $\{O_n\}$ 为一列稠密的开集, 则 $\bigcap O_n$ 也稠密.

只需证明 $\forall W \subset X$ 开, $W \cap \bigcap O_n \neq \emptyset$ 即可.

$\forall x_0 \in W, \exists r_0 > 0$ 使得 $\overline{B(x_0, r_0)} \subset W$.

Summary

CUE

由 $\overline{O_1} = X$ 和 $\exists x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$, 故由 O_1 开始
可迭取 $0 < r_n < \frac{r_0}{2}$ 使得

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1,$$

通过归纳, 可以迭取 $\{x_n\}, \{r_n\}$

$$\begin{cases} 0 < r_n < \frac{1}{2} r_{n-1} \\ \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n. \end{cases}$$

从而 $\{B(x_n, r_n)\}$ 为一列闭区间套, 故 $\exists x \in X$

$$\{x\} = \bigcap B(x_n, r_n) \subset W \cap (\bigcap O_n)$$

$$\Rightarrow x \in W \cap (\bigcap O_n) \Rightarrow \bigcap O_n \text{ dense in } X.$$

② X 为第二纲集.

设 $\{x_n\}$ 为任一列点集, 则 $\{\overline{\{x_n\}}\}$ 是一列稠密开集, 从而 $\bigcap \overline{\{x_n\}}^c = X$

$$\Rightarrow \bigcup \overline{\{x_n\}} \subset \bigcup \overline{\{x_n\}}^c = \left(\bigcap \overline{\{x_n\}}^c \right)^c = \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcup \overline{\{x_n\}} = X.$$

Summary

CUE

列紧集

定义: X 为度量空间, $A \subset X$, A 列紧, 若 A 中任何点列均有收敛子列.

称 A 紧 (自列紧) 若 A 为列紧闭集.

例: $\mathbb{R}^n$ 中所有有界集

$\mathbb{R}^n$ 中 有界 $\Leftrightarrow$ 列紧

A 列紧 $\Rightarrow A$ 有界

$A \subset X$ 列紧, $\{x_n\} \subset A$ Cauchy, 则 $\{x_n\}$ 在 A 中收敛.
故 X 为列紧的度量空间, 则 X 完备.

定义: 设 X 为度量空间, $A \subset X$, $\forall \varepsilon > 0$, 称 A 有有限

ε -网 若 $\exists \{x_j\}_{j=1}^{n_\varepsilon} \subset A$ 使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B(x_j, \varepsilon)$$

称 A 完全有界 若 $\forall \varepsilon > 0$ 均有有限 ε -网.

定理: 完全有界集可分.

证: 设 A 完全有界. 则 $\forall \varepsilon > 0$, A 都有有限 ε -网.

$\forall k \geq 1$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$, 则

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N(k)} B(x_j^{(k)}, \frac{1}{k})$$

从而 $\mathcal{B} = \{x_j^{(k)}\}_{k \geq 1, 1 \leq j \leq N(k)}$ 可数且

$$\overline{\mathcal{B}} = A.$$

定理: 列紧的度量空间必完备.

Summary

CUE

定理: 列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界 + 完备 (度量空间)Proof: " $\Rightarrow$ " 完备已证, 只须证完全有界.反设 X 列紧但不完全有界, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 X 无有穷 ε_0 -网. 故 $\forall x_1 \in X$.

$$\exists x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$$

若已选取 $\{x_j\}_{j=1}^{k-1}$, 则 $\exists x_k$ 使得

$$x_k \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j, \varepsilon_0).$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 满足

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \neq m$$

这与 X 列紧矛盾!" $\Leftarrow$ " 设 $\{x_n\} \subset X$, 只需证其有收敛子列

即可.

对于有穷 1-网, 存在 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_n^{(1)}\}$ 以及 y_1 使

$$\{x_n^{(1)}\} \subset B(y_1, 1)$$

对于 $\forall k \geq 1$, 若已选出 $\{x_n^{(k)}\}$, 则对于有穷 $k+1$ -网, 存在 $\{x_n^{(k)}\}$ 子列 $\{x_n^{(k+1)}\}$ 以及 $y_{k+1} \in X$ 使得

$$\{x_n^{(k+1)}\} \subset B(y_{k+1}, \frac{1}{k+1})$$

从而 $\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列. 事实上: $\forall p, n \geq 1$ 有

CUE

$$d(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leq d(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + d(y_n, x_n^{(n)}) \\ \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

定理: X 为度量空间, $A \subset X$, 则 A 自列紧 $\Leftrightarrow A$

有有限覆盖性质.

Proof: " $\Rightarrow$ " 反设 A 不能被有限覆盖. 设 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}$ 无有限子覆盖, 由 A 自列紧和 A 完全有界对于有穷 1-网, $\exists y_1 \in A$, $B(y_1, \frac{1}{2})$ 不能被有限覆盖. 对于有穷 k -网, $\exists y_k \in A$, $B(y_k, \frac{1}{k})$ 不能被有限覆盖. 故 $\{y_k\} \subset A$,由 A 列紧知 $\exists \{y_{k_j}\} \subset \{y_k\} \subset A$

$$y_{k_j} \rightarrow y \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

而 $y \in A \subset \bigcup \lambda_\alpha$, 故 $\exists \alpha \in I$

$$y \in \lambda_\alpha$$

由 λ_α 开集知 $\exists k \geq 1$

$$B(y, \frac{1}{k}) \subset \lambda_\alpha$$

而 $y_{k_j} \rightarrow y$, 故 $\exists N \geq 1$

$$d(y_{k_j}, y) < \frac{1}{2k} \quad \forall j \geq N$$

取 $M = \max\{k_j, N\}$, 则

$$B(y_M, \frac{1}{M}) \subset B(y, \frac{1}{k}) \subset \lambda_\alpha$$

这与 $B(y_M, \frac{1}{M})$ 不能被有限覆盖矛盾!

Summary

Summary

“ $\Leftarrow$ ” 首先证明 A 为闭集 $\forall x \in A^c, \forall y \in A$

$\exists r_y > 0$ 使得 (如 $r_y = \frac{1}{2} d(x, y)$)

$$B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$$

由 A compact, $\exists y_1, \dots, y_N$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^N B(y_j, r_{y_j})$$

$$B = \bigcap_{j=1}^N B(x, r_{y_j})$$

$$\text{则 } B \subset A^c$$

$$\Rightarrow A^c \text{ open} \Rightarrow A \text{ closed.}$$

再证明 A 列紧. 设 $\{x_n\} \subset A$, 若有无穷多个元素相同, 则证毕. 不妨设 $x_n \neq x_m \forall n \neq m$.

反设 $\{x_n\}$ 中不包含 A 中点为聚点的子列

则 $\forall y \in A, \exists \delta_y > 0$ 使得

$$(B(y, \delta_y) \setminus \{y\}) \cap \{x_n\} = \emptyset$$

由 A compact $\exists y_1, \dots, y_N$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^N B(y_j, \delta_{y_j})$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \text{ 只有有限多个点, 矛盾!}$$

命题: 紧集上的连续函数一致连续

有限维空间中, 有界闭集 $\Leftrightarrow$ 紧集.

紧集上连续函数可取到最值.

紧集在连续函数下的像也为紧集

紧集的闭子集也为紧集.

例: 设 $1 \leq p < \infty, A \subset \ell^p$, 则 A 列紧的必要条件是 A 在 ℓ^p 中有界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Proof: “ $\Rightarrow$ ” $\forall \varepsilon > 0$, 因 A 列紧, 存在有穷 ε -网

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N B(y^{(n)}, \varepsilon/2)$$

故 $\forall x \in A$

$$\|x\|_p \leq \max_{1 \leq n \leq N} \|y^{(n)}\|_p + \varepsilon/2 < \infty$$

即 A 有界. 又 $\{y^{(n)}\} \subset \ell^p$ 和

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |y_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

故 $\exists \tilde{N} \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\left(\sum_{j=\tilde{N}+1}^{\infty} |y_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon/2 \quad \forall 1 \leq n \leq N$$

$$\Rightarrow \forall x \in A, \exists y^{(n)}, x \in B(y^{(n)}, \varepsilon/2)$$

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j - y_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |y_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \|y^{(n)} - x\|_p \leq \varepsilon.$$

“ $\Leftarrow$ ” 设 A 有界, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

考虑 $\mathbb{R}^N$ 中的集合

$$\tilde{A} = \{ \tilde{x} = (x_1, \dots, x_N) : x = (x_1, \dots, x_N, \dots) \in A \}$$

则由 A 有界知 $\tilde{A}$ 有界, 而 $\tilde{A}$ 中完全有界与有界等价, 故存在有穷 ε -网

$$\tilde{A} \subset \bigcup_{n=1}^M B(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon)$$

记 $x^{(n)} = (\tilde{x}^{(n)}, 0, \dots, 0)$.

则 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^M$ 为 2ε -网. (直接验证).

定理. X 为紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 为完备距离空间.

Proof. 设 $\{f_n\}$ Cauchy, 则 $\forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| = \rho(f_n, f_m) \rightarrow 0$$

故 $\forall x \in X$ $\{f_n(x)\}$ Cauchy ($\mathbb{C}$ 中) 从而收敛

$$\text{记 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

下证 $f(x)$ 连续且 $\|f - f_n\| \rightarrow 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

$\forall x_0 \in X$, 令 U 为 x_0 邻域, 满足 $\forall x \in U$

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon.$$

从而 $\forall x \in U$ 有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &\quad + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

即 $f \in C(X)$.

并且 $\forall n \geq N$, $x \in X$ 有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$. 故 $C(X)$ 完备.

CUE

定义: 设 $\mathcal{F} \subset X$, 称 $\mathcal{F}$ 为等度连续的, 若 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0$$

$$|x-y| < \delta, f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

定理 (Arzelà - Ascoli) 设 $\mathcal{F} \subset C([a, b])$, 则 $\mathcal{F}$

列紧 $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ 有界且等度连续.

Proof: " $\Rightarrow$ " 设 $\mathcal{F}$ 列紧, 则 $\mathcal{F}$ 完全有界, 故 $\exists \{f_i\}_{i=1}^N$

使得 $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^N B(f_i, \varepsilon/3)$

$\Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}$,

$$\|f\| \leq \|f_i\| + \varepsilon/3$$

从而 $\mathcal{F}$ 有界.

由于 X 紧, 故 f_i -一致连续, 故 $\forall 1 \leq i \leq N, \exists \delta_i > 0$

使得 $|x-y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$.

取 $\delta = \min \delta_i$, 则

$$1 \leq i \leq N, |x-y| < \delta, f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$

从而 $\forall f \in \mathcal{F}, \exists f_i$ 使得

$$f \in B(f_i, \varepsilon/3)$$

故有 $\forall x, y \in X, |x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)|$$

$$+ |f_i(y) - f(y)|$$

$$\leq 2\|f - f_i\| + |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Summary

CUE

故 $\mathcal{F}$ 等度连续.

" $\Leftarrow$ " 设 $\mathcal{F}$ 有界且等度连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$|x-y| < \delta, f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$$

由于 X 为紧集, 故存在 δ -网 $\{x_i\}_{i=1}^N$, 考虑 $\mathbb{R}^N$ 中的集合 $\mathcal{G} = \{(f(x_1), \dots, f(x_N)) : f \in \mathcal{F}\}$.

则由 $\mathcal{F}$ 有界知 $\mathcal{G}$ 有界. 从而 $\mathcal{G}$ 完全有界, 故设 $\{f_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{F}$,

$$\{(f_j(x_1), \dots, f_j(x_N))\}_{j=1}^M$$

为 $\mathcal{G}$ 的有穷 $\varepsilon/3$ -网. 断言: $\{f_j\}_{j=1}^M$ 为 $\mathcal{F}$ 的有穷 ε -网. 事实上: $\forall x \in X, f \in \mathcal{F}, \exists x_i$ 使得

$$x \in B(x_i, \delta/2)$$

以及 f_j 使得 f 落在 f_j 的 $\varepsilon/3$ 网中. 故

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)|$$

$$+ |f_j(x_i) - f_j(x)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

故 $\mathcal{F}$ 列紧.

Summary

Banach 压缩映像原理.

定义: 设 (X, d) 度量空间, 称 $T: X \rightarrow X$ 压缩映射
若存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

命题: 压缩映射一定连续.

T^k 压缩, T 不一定压缩.

定理: X 为完备度量空间, T 为 X 上压缩映射, 压缩系数为 α , 则 T 在 X 中存在唯一不动点 X^*

$$\text{i.e. } TX^* = X^*$$

进一步, $\forall x \in X$, 令 $x_{n+1} = Tx_n$, 则

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, x_0)$$

Proof. 构造序列: $\forall x \in X, x_0 = x$

$$Tx_n = x_{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

$$\text{则 } d(Tx_n, x_{n+1})$$

$$\leq \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$$

$\Rightarrow \forall n, p \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=1}^p d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \alpha^{n+k-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

从而 $\{x_n\}$ Cauchy, 由 X 完备知 $\{x_n\}$ 收敛

故存在 $X \in X$ 使得

$$x_n \rightarrow X^*$$

由 T 连续以及 $Tx_n = x_{n+1}$ 知

$$TX^* = X^*$$

故 X^* 为 T 的不动点. 设 X^*, X^{**} 均为 T 的不动点, 则

$$d(X^*, X^{**}) \leq \alpha d(X^*, X^{**})$$

$$\Rightarrow d(X^*, X^{**}) = 0 \Rightarrow X^* = X^{**}, \text{ 即不动点唯一.}$$

定理: X 完备, $T: X \rightarrow X$, 若 $\exists n \geq 1$, T^n 为压缩映射,

则 T 存在唯一不动点.

Proof. 由 T^n 为压缩映射知 T^n 有唯一不动点记为 x , 则

$$T^n x = x$$

$$\Rightarrow T^{n+1} x = x \Rightarrow T^n(Tx) = Tx$$

$$\Rightarrow \text{由唯一性: } Tx = x$$

从而 x 也为 T 的不动点.

设 y 也为 T 的不动点, 则 $Ty = y$, 则

$$T^n y = T^{n+1} y = T^{n+2} y = \dots = y$$

但 T^n 不动点唯一, 故 $y = x$. 即 T 不动点唯一.

例: 设 $f \in C([0,1])$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 方程.

$$\phi(t) = \lambda \int_0^t e^{-s} \phi(s) ds + f(t)$$

求证: 存在唯一连续解.

CUE

$$\text{Proof. } \phi(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} \phi(s) ds + f(t)$$

$$\Leftrightarrow \phi(t)e^{-\lambda t} = \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} \phi(s) ds + f(t)e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \phi(t) = \lambda \int_0^t \phi(s) ds + g(t)$$

$$\text{取 } T\phi(t) = \lambda \int_0^t \phi(s) ds$$

$$\text{则 } \|T\phi - T\psi\| \leq |\lambda| \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds$$

$$\leq |\lambda| t \|\phi - \psi\|$$

$$\|T^n \phi - T^n \psi\| \leq |\lambda|^n \int_0^t \|T\phi - T\psi\| ds$$

$$\leq |\lambda|^n \int_0^t \int_0^s dx_1 dx_2 \|\phi - \psi\|$$

$$\leq |\lambda|^n \frac{t^2}{2} \|\phi - \psi\|$$

$$\|T^n \phi - T^n \psi\| \leq |\lambda|^n \frac{t^2}{2} \|\phi - \psi\|$$

由于 $\frac{|\lambda|^n}{n!} \rightarrow 0$ 故存在 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\frac{|\lambda|^{n_0}}{n_0!} < 1$

从而 T^{n_0} 为压缩映射, 故 T 有唯一不动点.

Summary

CUE

完备化空间

定义: 设 (X, d) , (Y, ρ) 为度量空间, 称 $T: X \rightarrow Y$ 为等距的

若 $\forall x, y \in X$ 有

$$\rho(Tx, Ty) = d(x, y)$$

进一步, 若 T 为满的, 称 T 为 X 到 Y 的等距同构

Remark: 等距同构为单射

定义: 设 (X, d) , (Y, ρ) 为度量空间, 称 (Y, ρ) 为 (X, d) 的完备化空间, 若

① (Y, ρ) 完备

② 存在 (Y, ρ) 的稠密子空间 (X, d) 使得 (X, d) 与 (Y, ρ) 为等距同构的.

定理: 任何度量空间均存在完备化空间.

定义等价关系

Proof. 令 $S = \{x_n: (x_n) \text{ 为 } X \text{ 中的 Cauchy 列}\}$.

定义等价关系

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

由于

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

$$\Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

由 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为 Cauchy 列知 $\{d(x_n, y_n)\}$ 也为

Cauchy 列, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ 存在.

Summary

CUE

"~" 为 $\mathcal{X}$ 上的等价关系

①. $x \sim x$

②. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

③. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

显然, 定义等价类

$$Y = \mathcal{X}/\sim = \{[x_n] : \{x_n\} \text{ Cauchy}\}$$

定义: $\rho: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

若 $\{x_n\} \sim \{x'_n\}, \{y_n\} \sim \{y'_n\}$, 则由

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

$$\text{知 } \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)) = 0$$

即 ρ 的定义合理.易证 ρ 为 Y 上的一个度量.从而 (Y, ρ) 为度量空间. $\forall x \in X$, 则 $\{x, x, \dots\}$ 为 X 上的一个 Cauchy 列记其所在的等价类为 x^* , 记

$$Y_1 = \{x^* : x \in X\}.$$

则 $\forall \{x_n\} \in Y$, 由 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列知:

$$\rho(\{x_n\}, x_k^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_k) \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

从而 Y_1 在 Y 中稠密.验证 ρ 合理性.

$$\overline{Y_1} = Y.$$

Summary

CUE

$$Y_1 \subseteq X.$$

定义映射: $T: X \rightarrow Y_1$

$$x \mapsto x^*$$

$$\text{则 } \rho(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

从而 T 为等距映射并且由 T 的构造知 T 为满射, 即 T 为等距同构 $\forall \{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Y 中的 Cauchy 列由 Y_1 在 Y 中稠密知, $\forall k \geq 1$, 存在 $x_k \in X$ 使得

$$\rho(\{\tilde{x}_n\}, x_k^*) < \frac{1}{k}.$$

$$\text{从而 } d(x_k, x_l) = \rho(x_k^*, x_l^*)$$

$$\leq \rho(x_k^*, \{\tilde{x}_n\}) + \rho(x_l^*, \{\tilde{x}_n\})$$

$$+ \rho(\{\tilde{x}_n\}, x_k^*) + \rho(\{\tilde{x}_n\}, x_l^*)$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \rho(\{\tilde{x}_n\}, \{\tilde{x}_n\})$$

$$\rightarrow 0 \text{ as } k, l \rightarrow \infty$$

这说明 $\{x_n\}$ 在 X 中 Cauchy, 故考虑 $\{x_n\}$ 所在等价类.

$$\rho(\{\tilde{x}_n\}, \{x_n\}) \leq \rho(\{\tilde{x}_n\}, x_m^*) + \rho(x_m^*, \{x_n\})$$

$$\leq \frac{1}{m} + \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \rightarrow 0$$

as $m \rightarrow \infty$ 从而 $\{\tilde{x}_n\} \rightarrow \{x_n\}$, 这说明 (Y, ρ) 完备.

定理: 完备化空间在等距同构意义下唯一.

Summary

CUE

Proof. 设 $(Y_1, \rho_1), (Y_2, \rho_2)$ 为 (X, d) 的完备化空间, 则

$$T_1: X \rightarrow Y_1$$

$$T_2: X \rightarrow Y_2$$

为等距同构 $\Rightarrow T_2 T_1^{-1}: Y_1 \rightarrow Y_2$

为等距同构

$\forall x \in Y_1, \exists \{x_n\} \subset Y_1, \rho_1(x_n, x) \rightarrow 0.$

$$\hat{T}_x = \lim T x_n$$

$$\rho_2(\hat{T}x, \hat{T}y) = \lim \rho_2(Tx_n, Ty_n)$$

$$= \lim \rho_1(Tx_n, Ty_n)$$

$$= \rho_1(x, y)$$

Summary

CUE

CUE

与 $\{\|A_n\|\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy, 从而有界. 记 $\limsup \|A_n\| = M$ 范数.

定义: 设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 若 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$① \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$② \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in X$$

$$③ \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间.

$$\text{半范数: } \begin{cases} \rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in X \\ \rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) \end{cases}$$

定义: 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上的 2 个范数, 若

$$\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_2 \rightarrow 0$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$. 若任何一个强于另一个, 则称两个范数等价.

定理: 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上 2 个范数, 则 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow$

$\exists C > 0$ 使得

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Proof. " $\Leftarrow$ " 是显然的

" $\Rightarrow$ ": 反设命题不成立, 则 $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \exists x_n \in X$ 使得

$$\|x_n\|_2 \geq n \|x_n\|_1$$

不妨设 $\|x_n\|_2 = 1$

Summary

CUE

$$\text{则 } | \quad | > n \|x_n\|,$$

$$\text{则 } \|x_n\| \rightarrow 0 \text{ 但 } \|x_n\|_2 = 1, \text{ 矛盾!}$$

推论: X 上 2 个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价 $\Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0$

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \quad \forall x \in X$$

• 有穷维赋范线性空间的刻画.

引理: 设 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 X 中 n 个线性无关的元素, 则 $\exists \mu > 0$

$$\text{使得 } \mu \sum |\alpha_j| \leq \|\sum \alpha_j e_j\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Proof: 若 $\alpha = 0$, 则显然成立. 下设 $\alpha \neq 0$, 则 $\sum |\alpha_j| \neq 0$. 故

$$\mu \sum |\alpha_j| \leq \|\sum \alpha_j e_j\|$$

$$\Leftrightarrow \mu \leq \|\sum \frac{\alpha_j}{\sum |\alpha_j|} e_j\|$$

记 $\beta_j = \alpha_j / \sum |\alpha_j|$, 则 $\sum |\beta_j| = 1$. 考虑集合

$$S = \{x \in \mathbb{C}^n : \sum |x_j| = 1\}$$

则 S 为 $\mathbb{C}^n$ 中有界闭集, 从而为紧集. 又设

$$f(x) = \|\sum x_j e_j\|$$

$$\text{则 } |f(x) - f(y)| \leq \sum |x_j - y_j| \|e_j\|$$

$$\leq \max \|e_j\| \cdot \sum |x_j - y_j|$$

故 f 连续, 故 f 在 S 上能取得最小值 μ . 设

$$f(x^*) = \mu$$

$$\text{则 } \mu = \|\sum x_j^* e_j\|$$

由于 $\{e_j\}$ 线性无关, 故 $\mu = 0 \Leftrightarrow x^* = 0$ 而 $x^* \notin S$

Summary

CUE

如 $\{\|A_n\|\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy, 从而有界, 记 $\limsup \|A_n\| = M$

CUE

故 $\mu > 0$, 从而

$$\mu \leq f(x) \quad \forall x \in S.$$

定理: 有穷维赋范线性空间任意 2 个范数等价.

Proof: 设 $\|\cdot\|$ 为 X 任意范数, 则由引理若 $\{e_j\}$ 为 X 的一组基, $\forall x \in X$, $\exists \{\alpha_j\}$

$$x = \sum x_j e_j$$

$$\text{从而 } \sum |x_j| \leq \|x\| \leq \max \|e_j\| \cdot \sum |x_j|$$

即 $\|\cdot\|_1 : x \rightarrow \sum |x_j|$ 与 $\|\cdot\|$ 等价. 即 X 中任一范数均与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

推论: 任意一个有穷维赋范线性空间与 $\mathbb{C}^n$ 拓扑等同胚, 代数同构, 从而可分, 完备.

引理 (Riesz's Lemma) 设 Y 为赋范线性空间的闭子空间

且 $Y \neq X$, 则 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, $\exists x \in X \setminus Y$ 使得

$$\|x\| = 1, \quad \text{dist}(x, Y) > \varepsilon.$$

Proof: $\forall u \in X \setminus Y$, 记

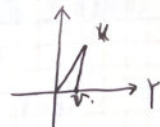
$$d = \text{dist}(u, Y) = \inf_{v \in Y} \|u - v\|.$$

则 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, $\exists v \in Y$ 使得

$$d \leq \|u - v\| \leq d/\varepsilon$$

$$\text{记 } x = \frac{u - v}{\|u - v\|}, \text{ 则}$$

$$\text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{u - v}{\|u - v\|} - y \right\| \leq \frac{1}{\|u - v\|} d \leq \varepsilon.$$



Summary

CUE

定理: 线性赋范空间 X 有限维 $\Leftrightarrow$ 单位球面列紧Proof. 若 X 有限维, 则单位球面有界, 从而列紧.若 X 无限维, 则可选出一列 X 的有限维子空间 (X_n)

$$X_{n+1} \subsetneq X_n \quad \forall n \geq 1.$$

故 $\forall n \geq 1, \exists x_n \in X_n$.

$$\|x_n\|=1, \quad \text{dist}(x_n, X_m) \geq \frac{1}{2}$$

这说明 $\{x_n\} \subset B_X$ 且

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \neq n$$

从而 $\{x_n\}$ 不可能有收敛子列, 从而不列紧. $\square$

Summary

CUE

知 $\{\|A_n\|\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy, 从而有界, 记 $\limsup \|A_n\| = M$.

CUE

Hahn-Banach 定理.

定义: X, Y 为 $\mathbb{C}$ 上的赋范线性空间, D 为 X 的线性子空间, $T: D \rightarrow Y$ 为有界线性算子, 若

$$\textcircled{1} \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in D$$

$$\textcircled{2} \quad \exists M > 0 \quad \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$$

定理: 设 X, Y 为赋范线性空间, D 为子空间, $T: D \rightarrow Y$ 为线性算子. 则下列性质等价. $\textcircled{1}$ T 有界 $\textcircled{2}$ T 在 D 中某一点连续 $\textcircled{3}$ T 在 D 中任何一点连续.Proof. $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ 显然 $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$. 设 T 在 x_0 处连续. 则 $\forall x \in D$, 令 $x_n \rightarrow x$

$$\text{则 } \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x + x_0) - Tx_0\| \rightarrow 0$$

故 T 在 x 处连续 $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$. 由于 T 在 0 处连续, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$$

取 $\varepsilon = 1$, 则 $\forall x \in D, \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \in B(0, \delta)$

$$\text{故 } \|T \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2}\| < 1$$

$$\Rightarrow \|Tx\| < \frac{2}{\delta} \|x\| \quad \forall x \in D$$

即 T 有界.

Summary

CUE

定义: 设 X, Y 为 $\mathbb{C}$ 上的赋范线性空间, 记 $\mathcal{L}(X, Y)$ 为所有 X 到 Y 的有界线性算子构成的集合, 定义其上的范数为

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

从而 $\mathcal{L}(X, Y)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的赋范线性空间.

若 $Y = X$, 记 $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$

若 $Y = \mathbb{C}$, 记 $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = X^*$, X 的对偶空间.

定理: X, Y 为 $\mathbb{C}$ 上赋范线性空间, 则

$\mathcal{L}(X, Y)$ 为 Banach 空间 $\Leftrightarrow Y$ 为 Banach 空间.

Proof: " $\Leftarrow$ " ① 定义 A .

设 $\{A_n\}$ 为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 上的 Cauchy 列, 则 $\forall x \in X$

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\|.$$

$\Rightarrow \{A_n x\}$ 为 Y 上的 Cauchy 列, 由 Y 完备知其收敛记极限为 Ax .

② 验证 A 的合理性.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim A_n x + \beta \lim A_n y \\ &= \alpha Ax + \beta Ay \end{aligned}$$

由 $\{A_n\}$ Cauchy 及

$$\|A_n\| - \|A_m\| \leq \|A_n - A_m\|$$

Summary

CUE

知 $\{\|A_n\|\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy, 从而有界, 记 $\limsup \|A_n\| = M$

则 $\forall x \in X$

$$\|Ax\| = \lim \|A_n x\| \leq \limsup \|A_n\| \|x\| \leq M \|x\|$$

故继续: $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

③ 验证 $A_n \rightarrow A$ in $\mathcal{L}(X, Y)$.

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中 Cauchy 知

$$\begin{aligned} \|A_n - A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| \|x\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

综上: $\mathcal{L}(X, Y)$ 完备即为 Banach space.

引理: (Zorn's Lemma) 设 X 为一个全序集, 若它的每一个全序子集均有上界, 则 X 有极大元.

定理: 设 X 为实线性空间, Y 为 X 子线性空间, p 为 X 上的次线性泛函, 即

$$\textcircled{1} p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda > 0, x \in X$$

$$\textcircled{2} p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$$

若 f 为 Y 上的实线性泛函且满足 $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y$, 则存在 X 上的实线性泛函 F s.t.

$$\textcircled{1} F(x) = f(x) \quad \forall x \in Y.$$

$$\textcircled{2} F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Summary

Proof. 定义集合.

$$\mathcal{H} = \left\{ h: D(h) \subset X \rightarrow \mathbb{R}: \begin{array}{l} D(h) \subset X \text{ 线性空间} \\ h \text{ 实线性} \\ \|h(x)\| \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \\ h \text{ 有线性性的} \end{array} \right\}$$

在 $\mathcal{H}$ 上定义序关系如下:

$$(h_1 \leq h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ 且 } h_2 \text{ 实线性 } h_1)$$

则 $\mathcal{H}$ 为半序集. 设 $\Omega \subset \mathcal{H}$ 为任一全序集, 记 $\Omega = \{h_i\}_{i \in I}$

则记 $h(x) = h_i(x) \quad x \in D(h_i) \text{ for some } i$

以及 $D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$

则 h 为 Ω 的一个上界. 由 Zorn 引理知存在一个极大元 f , 断言: $D(f) = X$. 若不然, 反设

$D(f) \neq X$, 则 $\forall x_0 \in X \setminus D(f)$, 定义

$$D(h) = D(f) + \text{span}\{x_0\}.$$

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \quad \forall x + tx_0 \in D(h)$$

其中 α 待定, 则 $h \in \mathcal{H}$ 只需 $h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h)$

而由 p 的正齐次性, 只需

$$\begin{cases} h(x + x_0) = f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(h) \\ h(y - x_0) = f(y) - \alpha \leq p(y - x_0) & \forall y \in D(h) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - f(x) \quad \forall x, y$$

$$\text{但 } f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(x - x_0)$$

故 α 存在. 即

$h \in \mathcal{H}$, 这与 f 为极大元矛盾.

定理 (Hahn - Banach) 设 X 为复线性空间, Y 为 X 线性子空间

p 为 X 上的一个半范数, 若 f 为定义在 Y 上的线性泛函且满足 $|f(y)| \leq p(y) \quad \forall y \in Y$, 则存在定义在 X 上的线性泛函 F 使得

$$\textcircled{1} f(y) = F(y) \quad \forall y \in Y.$$

$$\textcircled{2} |F(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Proof. 将 X, Y 看成实线性空间, 记

$$g_0(y) = \text{Re } f(y) \quad \forall y \in Y.$$

$$\text{则 } |g_0(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

由 Hahn - Banach 定理知, $\exists f_0 \in X^*$ 使得

$$f_0(x) = g_0(x) \quad \forall x \in X \cap Y.$$

$$f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{记 } f(x) = f_0(x) - i f_0(ix) \quad \forall x \in X$$

$$\text{则 } f(x) = f_0(x) - i f_0(ix)$$

$$= g_0(x) - i g_0(ix)$$

$$= \text{Re } f(x) + i \text{Im } f(x) = f(x) \quad \forall x \in Y$$

$$\text{且 } f(ix) = f_0(ix) - i f_0(-x)$$

$$= i(f_0(x) - i f_0(ix)) = i f(x) \quad \forall x \in X$$

即 f 有复齐次性. 并且 $\forall x \in X, \exists \theta, f(x) = |f(x)| e^{i\theta}$

CUE

$$\begin{aligned} |f(x)| &= f(x)e^{-i\theta} = f(xe^{i\theta}) \\ &= f_0(xe^{i\theta}) \leq p(xe^{i\theta}) \\ &\leq p(x) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

定理 (Hahn-Banach) 设 X 为赋范线性空间, Y 为 X 的子空间, $f_0 \in Y^*$, 则 $\exists f \in X^*$ 使得

$$\textcircled{1} f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in Y.$$

$$\textcircled{2} \|f\| = \|f_0\|$$

称 f 为 f_0 的保范延拓.

Proof. 令 $p(x) = \|f_0\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$, 则 p 为 X 上的半范数, 并且

$$f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

由 Hahn-Banach 定理, 存在 f

$$f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in Y$$

$$f(x) \leq \|f_0\| \|x\| \quad \forall x \in X.$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \|f_0\|, \text{ 又}$$

$$\|f_0\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in Y}} f_0(y) \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} f(x) = \|f\|.$$

$$\text{故 } \|f_0\| = \|f\|$$

推广: 设 X 为赋范线性空间, $x_0 \neq 0$, 则 $\exists f \in X^*$ such

$$\text{that } \|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Proof. 考虑 X 的线性子空间 $Y = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Summary

CUE

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \quad \forall \lambda x_0 \in Y$$

故由 Hahn-Banach 知, $\exists f \in X^*$ 使得

$$\|f\| = \|f_0\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1$$

$$f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|$$

推广: 设 X 为线性赋范空间, Y 为 X 闭子空间, $x_0 \in X \setminus Y$

则存在 $f \in X^*$, 使得

$$\textcircled{1} f(Y) = \{0\}.$$

$$\textcircled{2} \|f\| = 1$$

$$\textcircled{3} f(x_0) = d = \text{dist}(x_0, Y) > 0.$$

Proof. 定义 X 的子空间 $Z = Y + \text{span}\{x_0\}$ 及其上的线性泛函

$$f_0(x + tx_0) = td \quad \forall x + tx_0 \in Z$$

$$\text{则 } \|f_0\| = \|f_0(x + tx_0)\| = |td|$$

$$\leq |t| \|x_0 + tx_0\| = \|x + tx_0\|$$

$\Rightarrow \|f_0\| \leq 1$, 由 Hahn-Banach 定理, 可将 f_0 保范延拓至 X 上

记为 f , 则 f 满足 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$, 则 $\|f\| = \|f_0\| \leq 1$

又由 $d = \text{dist}(x_0, Y)$ 知, $\exists \{x_n\}$

$$d \leq \|x_0 - x_n\| \leq d + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{从而 } d = f(x_0) = f(x_0 - x_n) \leq \|f\| \|x_0 - x_n\|$$

$$\leq \|f\| (d + \frac{1}{n})$$

$$\text{令 } n \rightarrow \infty \text{ 得 } \|f\| = 1.$$

Summary

CUE

推论: 设 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 线性无关, 则存在 $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X^*$ 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proof. 记 $X_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}$

则由归纳上一个命题, $\exists f_i \in X^*$ 使得

$$\begin{cases} f_i(X_i) = 0 \\ \|f_i\| = 1 \\ f_i(e_i) = 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

定理: 设 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 线性无关 ($\subset X^*$), 则存在 $\{e_j\}_{j=1}^n \subset X$ 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proof. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

$$\mathcal{F} = \{(f_1(x), \dots, f_n(x)) : x \in X\}.$$

断言: $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, 若不然, 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$x_0 \notin \mathcal{F}.$$

但 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 闭线性子空间 (有限维), 故 $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \alpha^T y = 0 & \forall y \in \mathcal{F} \\ \alpha^T x_0 = \text{dist}(x_0, \mathcal{F}) \\ \|\alpha\| = 1 \end{cases} \quad (1)$$

由 (1) 知, $\sum \alpha_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \in X$

与 $\{f_i\}$ 线性无关矛盾!

Summary

CUE

引理: 设 X 为赋范线性空间, X^* 为其对偶空间, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X^*$

若 $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f_0$

$$\text{则 } \exists \{\lambda_i\} \subset \mathbb{C}, \quad f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

Proof. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 的闭子空间

$$\mathcal{F} = \{(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) : x \in X\}$$

则令 $f_i(x) = 0 \ (1 \leq i \leq n)$ 即 $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f_0$

那么 $f_0(x) = 0$, 故 $x_0 = (1, 0, \dots, 0)^T \notin \mathcal{F}$. 从而 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$

$$\text{使得 } \begin{cases} \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0 \\ \lambda_0 = \text{dist}(x_0, \mathcal{F}) > 0 \\ \|\lambda\| = 1 \end{cases}$$

从而令 $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, 则

$$f_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

Proof. 当 $n=1$ 时, 若 $X = \ker f_1$, 则 $f_1 = f_0 = 0$. 下设 $\ker f_1 \neq X$.

则 $\forall x_0 \in X \setminus \ker f_1$, $f_1(x_0) \neq 0$, 故 $\forall x \in X$, 有

$$x - \frac{f_1(x_0)}{f_1(x_0)} x_0 \in \ker f_1 \subset \ker f_0$$

$$\Rightarrow f_0(x) = \frac{f_0(x_0)}{f_1(x_0)} f_1(x) \quad \forall x \in X.$$

设 $n=k-1$ 时成立, 设 $n=k$, 则

$$\bigcap_{i=1}^k \ker f_i = \bigcap_{i=1}^{k-1} (\ker f_i \cap \ker f_k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} \ker(f_i|_{\ker f_k}) \subset \ker(f_0|_{\ker f_k})$$

由归纳假设, $\exists \{\lambda_i\}$ 使得

Summary

CUE

$$f_0(x) = \sum \lambda_i f_i(x) \quad \forall x \in \text{Ker } f_k$$

$$\text{从而 } \text{Ker } f_k \subset \text{Ker}(f_0 - \sum \lambda_i f_i)$$

故存在 λ_k 使得

$$\lambda_k f_k = f_0 - \sum \lambda_i f_i$$

定理: 设 $\{f_i\} \subset X^*$ 线性无关, 则

$$\textcircled{1} \exists \{e_j\} \subset X, f_i(e_j) = \delta_{ij}$$

$$\textcircled{2} X = \text{span}\{e_j\}_{j=1}^n \oplus \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i\right)$$

Proof. ① 由引理及 $\{f_i\}$ 线性无关:

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \neq \text{Ker } f_i$$

$$\text{从而 } \exists x_i \in \text{Ker}\left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker } f_j\right) \setminus \text{Ker } f_i$$

$$\text{故令 } e_i = x_i / f_i(x_i), \text{ 则}$$

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}$$

② 由于 $\forall x \in X$

$$x = \sum f_i(x) e_i + (x - \sum f_i(x) e_i)$$

$$f_j(x - \sum f_i(x) e_i) = f_j(x) - \sum f_i(x) \delta_{ij} = 0$$

$$\text{故 } \sum f_i(x) e_i \in \text{span}\{e_j\}_{j=1}^n$$

$$x - \sum f_i(x) e_i \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i$$

$$\Rightarrow X = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^n + \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i\right)$$

$$\text{又 } \forall x \in \text{span}\{e_i\}_{i=1}^n \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i\right)$$

$$x = \sum x_i e_i \text{ 且 } f_j(x) = x_j = 0$$

Summary

CUE

$$\text{从而 } X=0 \text{ 故 } \{e_i\} = \text{span}\{e_i\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i\right)$$

$$\text{即 } X = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^n \oplus \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i\right)$$

引理: 设 X 为赋范线性空间, f 为 X 上的线性泛函. 则

$$f \text{ 有界} \Leftrightarrow \text{Ker } f \text{ 为 } X \text{ 的闭线性子空间}$$

进一步, 若 $f \neq 0$, 则 $\forall x_0 \in X \setminus \text{Ker } f$, 有

$$X = \text{span}\{x_0\} \oplus \text{Ker } f$$

Proof. ① $\Rightarrow$ $\forall \{x_n\} \subset \text{Ker } f, x_n \rightarrow x$, 则由 f 连续知

$$\|f(x) - f(x_n)\| \leq M \|x - x_n\| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } f, \text{ 即 } \text{Ker } f \text{ 闭}$$

② $\Leftarrow$ 设 f 不有界, 故 $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \exists x_n \in X$

$$|f(x_n)| \geq n \|x_n\|.$$

$$\text{故 } f\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) = 1, \left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\| \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{从而 } f\left(\frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)}\right) = 0$$

$$\text{但 } \frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)} \rightarrow \frac{x_1}{f(x_1)} \notin \text{Ker } f.$$

② 令 $e = x_0 / f(x_0)$, 则 $\forall x \in X$

$$x = f(x)e + (x - f(x)e)$$

$$\in \text{span}\{x_0\} \oplus \text{Ker } f.$$

推论: 设 X 为线性赋范空间, Y 为 X 的有限维子空间, 则存在 X 的闭子空间 Z such that

$$X = Y \oplus Z.$$

Summary

CUE

定义: 设 X 为实线性空间, 称 X 的线性子空间 Y 为极大
 的, 若任何以 Y 为真子集的线性子空间 Z 都有

$$Z = X.$$

引理: 设 X 为实线性空间, Y 为 X 极大线性子空间 $\Leftrightarrow$

Y 为 X 真子空间且 $\forall x_0 \in X \setminus Y, X = \text{span}\{x_0\} \oplus Y.$

Proof: " $\Rightarrow$ " 由于 $Y \neq \text{span}\{x_0\} \oplus Y$, 故由极大线性子空间的定义知 $\text{span}\{x_0\} \oplus Y = X.$

" $\Leftarrow$ " 设 Z 为以 Y 为真子集的线性子空间, 则

$$\forall x_0 \in Z \setminus Y \subset X \setminus Y$$

$$\text{有 } \text{span}\{x_0\} \oplus Y \subset Z$$

$$\text{但 } \text{span}\{x_0\} \oplus Y = X, \text{ 故 } X = Z$$

即 Y 为 X 的极大线性子空间.

定义: 设 X 为实线性空间, Y 为 X 极大线性子空间

$x_0 \in X \setminus Y$, 称 $L = x_0 + Y$ 为 X 中的极大流形,

简称超平面

定理: 设 X 为实(赋范)线性空间, 则 L 为 X 中一个

(闭)超平面 $\Leftrightarrow$ 非零(有界)线性泛函 f 及 $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

使得 $L = H_f = \{x: f(x) = r\}$

Proof: " $\Leftarrow$ " $\forall x_0 \in H_f, f(x_0) = r.$

$$\forall x \in H_f, x - x_0 \in \text{Ker} f \Rightarrow x \in x_0 + \text{Ker} f$$

Summary

CUE

而由引理, $\text{Ker} f$ 显然是极大真子空间, 从而

$$H_f = x_0 + \text{Ker} f$$

为超平面.

" $\Rightarrow$ " 设 $L = x_0 + Y$. 其中 Y 为极大真子空间, 则

$$X = \text{span}\{x_0\} \oplus Y.$$

$$\text{令 } f(\lambda x_0 + y) = \lambda \quad \forall \lambda x_0 + y = x$$

$$\text{则 } f(x_0) = 1, \text{ 从而}$$

$$L = \{x: f(x) = 1\} = H_f$$

定义: 称集合 E 在超平面 $L = H_f$ 的一侧若

$$f(x) \leq r \quad (\geq r) \quad \forall x \in E.$$

称超平面 $L = H_f$ 分离 E 与 F 若

$$f(x) \leq r \leq f(y) \quad \forall x \in E, y \in F$$

若上述不等式严格成立, 则称 L 严格分离 E 与 F .

定义: 设 E 为线性空间 X 中的凸集, 以 0 为内点, 定义

$$p_E(x) = \inf \{\lambda > 0: x/\lambda \in E\}.$$

称 p_E 为由 E 诱导出的 Minkowski 泛函, 则 p_E 有以下性质

$$\textcircled{1}. p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x) \quad \forall \lambda > 0, x \in X$$

$$\textcircled{2}. p_E(x+y) \leq p_E(x) + p_E(y) \quad \forall x, y \in X$$

Proof: $\textcircled{1}. p_E(\lambda x) = \inf \{\alpha > 0: x/\alpha \in E\}$

$$= \inf \{\lambda \alpha x_0: x/\alpha \in E\} = \lambda p_E(x)$$

Summary

CUE

② 由 $p_E(x)$ 的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$p_E(x) > \lambda_1 - \varepsilon, p_E(y) > \lambda_2 - \varepsilon$$

$$x/\lambda_1 \in E, y/\lambda_2 \in E$$

$$\text{从而 } \frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{x}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{y}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \in E$$

$$\text{故 } p_E(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq p_E(x) + p_E(y) + 2\varepsilon$$

定理: 设 E 为实赋范线性空间 X 中以 0 为内点的真凸子

集, $x_0 \notin E$, 则存在一个闭超平面 L 分离 x_0 与 E

即 $\exists f \in X^*$ 及 $r \neq 0$

$$f(x) \leq r \leq f(x_0) \quad \forall x \in E$$

Proof. $\forall x \in E$, 由于 $x/1 \in E$, 故

$$1 \in \{x/\lambda > 0: x/\lambda \in E\}$$

从而 $p_E(x) \leq 1$, 并且显然有 $p_E(x_0) \geq 1$.

考虑 X 的线性子空间 $X_0 = \{\lambda x_0: \lambda \in \mathbb{R}\}$ 以及

其上的泛函

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$$

$$\text{则 } f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X_0$$

由 Hahn-Banach 定理 $\exists f \in X^*$

$$f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0) \geq 1$$

$$f(x) \leq p(x) \leq 1 \quad \forall x \in E$$

从而 $[f=1]$ 分离 $\{x_0\}$ 与 E .

Summary

CUE

定理: 设 E_1, E_2 为实线性空间中非空凸集, E_1 有内点, 则存在超平面 L 分离 E_1 与 E_2 .

Proof. 设 $E = E_1 - E_2 = \{y - z: y \in E_1, z \in E_2\}$ 则 E 凸, 由

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ 则 $E_1 - E_2 \neq 0$, 而 E_1 有内点, 故 $\exists B(x_0, \delta) \subset E_1$, 故 $\forall y \in E_2$

$$B(x_0, \delta) - y \subset E_1 - E_2 = E$$

从而 E 也有内点, 从而存在 $f \in X^*$, $r \neq 0$ 使得

$$f(x) \leq r \leq f(y) = 0 \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow f(y) \leq f(z) \quad \forall y \in E_1, z \in E_2$$

$$\text{取 } \alpha \in [\sup_{y \in E_1} f(y), \sup_{z \in E_2} f(z)]$$

则 $L = \{x: f(x) = \alpha\}$ 分离 E_1 与 E_2 .

推论: 设 E_1, E_2 为实赋范线性空间 X 中的非空凸集, E_1 有内点, 若 $E_1^\circ \cap E_2 = \emptyset$, 则存在超平面 L 分离 E_1, E_2 .

Proof. 只需证 $\overline{E_1^\circ} = E$

定理 (Ascoli) 设 E 为实赋范线性空间 X 中的闭凸集, $x_0 \notin E$

则 $\exists f \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in E$$

Proof. 由于 $x_0 \notin E$, E 闭集, 故 $\exists \delta > 0$ 使得

$$B(x_0, \delta) \subset E^c$$

故 $\exists f \in X^*$, $\alpha > 0$ 使得

Summary

CUE

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in E, y \in B(x_0, \delta)$$

$$\text{从而 } f(x_0) < \alpha + \delta_2 < f(x_0)$$

定义: 称 F 为线性流形, 若 F 为某个子空间 X_0 对向量

$$x_0 \in X \setminus X_0 \text{ 的平移, } F = x_0 + X_0.$$

定理: 设 E 为实赋范线性空间 X 中含有内点的闭凸集,

F 为 X 中一个线性流形, 若 $E^\circ \cap F \neq \emptyset$, 则存在一个包含 F 的超平面 $L = H_f^r$, 使得 E 在 L 的一侧.

Proof 易证 F 凸, 而 E 凸且有内点, 故存在 $f \in X^*$ 及 $r \in \mathbb{R}$

$$\text{使得 } f(x) \leq r \leq f(y) \quad \forall x \in F, y \in E$$

而 $F = x_0 + X_0$, 故

$$f(x_0 + y) \leq r \Rightarrow f(y) \leq r - f(x_0) \quad \forall y \in X_0$$

而 X_0 为线性子空间, 故

$$f(y) = 0 \quad \forall y \in X_0$$

$$\text{从而 } \forall x \in F \text{ 有 } f(x) = f(x_0)$$

$$\text{从而 } F \subset H_f^{f(x_0)} \text{ 且 } \forall y \in E$$

$$f(y) \geq r \geq f(x_0)$$

故 E 在 L 一侧.

定义: 称超平面 L 为凸集 E 在 x_0 处的支撑超平面, 若

E 在 L 一侧且 $\exists x_0 \in \bar{E} \cap L$, i.e.

$$f(x_0) \leq r = f(x_0) \quad \forall x \in E.$$

Summary

CUE

例: 若 $E = \{x: \|x\| \leq r\}$, $\|x_0\| = r$, 则存在 E 在 x_0 处的

支撑超平面

Proof ~~$\forall x_0 \neq 0$~~ , $\exists f \in X^*$, $\|f\| = 1$, $f(x_0) = r = \|x_0\|$

$$\forall x \in E, |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \leq r = f(x_0).$$

例: 设 E 为实赋范线性空间 X 中含有内点的凸集, 则 $\forall x \in \partial E$ 都可作一个支撑超平面.

Proof $\forall x_0 \in E \setminus E^\circ$, $E^\circ \cap \{x_0\} = \emptyset$

$$\text{注意到 } \{x_0\} = x_0 + 0.$$

故 $\exists f \in X^*$ $\{x_0\} \subset H_f^{f(x_0)} = L$ E 在 L 另一侧, 即

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in E.$$

定理 (Hahn-Banach 几何形式) 若实赋范线性空间 X 中线性流形 F 与开球 K 不相交, 则存在包含 F 的超平面与 K 不交.

Proof 不妨设 $K = \{x: \|x\| < 1\}$, $F = x_0 + X_0$.

由 $F \cap K = \emptyset$ 知

$$\|x_0 + x\| \geq 1 \quad \forall x \in X_0.$$

从而 $\text{dist}(x_0, X_0) \geq 1$, 由 Hahn-Banach 定理知: $\exists f \in X^*$

$$\text{使得 } \begin{cases} f(x) = 0 & \forall x \in X_0, \\ f(x_0) = \text{dist}(x_0, X_0) \geq 1 \\ \|f\| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F \subset H_f^1 = H, |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq 1 \leq f(x_0) \quad \forall x \in K$$

Summary

CUE

从而 $K \cap H = \emptyset$.定理: Hahn-Banach 定理几何形式 $\Rightarrow$ 解析形式.Proof 记 $K = \{x \in Y: \|x\| < 1\}$, $f \in Y^*$

$$G = \{x \in Y: f(x) = \|f\|_{Y^*}\}$$

$$= x_0 + K_{\|f\|} f \quad \text{为线性流形.}$$

则 $\forall x \in K$ 有

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| < \|f\|$$

从而 $G \cap K = \emptyset$, 由 Hahn-Banach 定理几何形式知存在 $H = \{f = 0\}$ 使得 $G \subset H$, $H \cap K = \emptyset$ 由 $0 \in K$ 知 $0 \notin H \Rightarrow C \neq 0$, 故 $C = \|f\|$ 断言这个下延拓 f .

$$\textcircled{1} F|_Y = f.$$

 $\forall x \in Y$, 若 $f(x) = a \neq 0$, 则 $f(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|f\|$

$$\Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \|f\| \in G \subset H \Rightarrow F(\frac{x}{\|x\|} \|f\|) = \|f\| \Rightarrow F(x) = a$$

若 $f(x) = a = 0$, 则 $\forall x_0 \in G$, $x + x_0 \in G \subset H$

$$\Rightarrow F(x + x_0) = \|f\| \Rightarrow f(x) = 0.$$

$$\textcircled{2} \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

 $\forall x \in K$, 若 $F(x) \geq \|f\|$, 则 $\frac{F(x)}{\|x\|} \geq 1$, 从而

$$\frac{x}{\|x\|} \|f\| \in K \text{ 且 } F(\frac{x}{\|x\|} \|f\|) = \|f\| \text{ 则 } \frac{x}{\|x\|} \|x\| \in K \cap H$$

与 $K \cap H = \emptyset$ 矛盾故 $\forall x \in K$, $F(x) < \|f\|$

Summary

CUE

$$\text{从而 } \|F\|_{X^*} = \sup_{x \in K} |F(x)| \leq \|f\|$$

$$\text{另一方面 } \|F\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)| \geq \sup_{x \in Y} |F(x)| = \|f\|$$

$$\text{从而 } \|f\| = \|F\|.$$

Summary

CUE

CUE

Lebesgue 空间上的反函数表示

定理: 设 $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\forall f \in (\ell^p)^*$, $\exists! c \in \ell^q$

$$f(x) = \sum c_i x_i \quad \forall x \in \ell^p$$

且 $\|f\| = \|c\|$. 反之任给 $c \in \ell^q$ 令

$$f(x) = \sum c_i x_i \quad \forall x \in \ell^p$$

则 $f \in (\ell^p)^*$, 定义

$$T: (\ell^p)^* \rightarrow \ell^q$$

$$f \mapsto c$$

则 T 为保范同构.Proof: 令 e_j 为 ℓ^p 中标准正交基, 令 $u_j = f(e_j)$. 我们来证明 (u_j) 即为所求的 ℓ^q 中元素.

$$\textcircled{1} \|u\|_q \leq \|f\| \Rightarrow u \in \ell^q$$

$$\forall x \in \ell^p, \quad x = \sum x_j e_j, \text{ 则 } \forall N \geq 1$$

$$f(\sum_{j=1}^N x_j e_j) = \sum_{j=1}^N x_j u_j \leq \|f\| \cdot (\sum_{j=1}^N |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{取 } x_j = |u_j|^{q-2} \cdot u_j, \text{ 则}$$

$$\sum_{j=1}^N |u_j|^q \leq \|f\| \cdot (\sum_{j=1}^N |u_j|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{即 } (\sum_{j=1}^N |u_j|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

$$\text{令 } N \rightarrow \infty \text{ 得 } \|u\|_q \leq \|f\|$$

$$\text{即 } u \in \ell^q$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sum u_j x_j \text{ and } \|f\| = \|u\|_q$$

Summary

Summary

CUE

 $\forall x \in L^p$, 由 $u \in L^q$ 知

$$\sum x_i u_i \leq \|x\|_p \|u\|_q < \infty$$

故由 f 为连续线性泛函知

$$f(x) = f\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i u_i$$

并且 $|f(x)| \leq \|x\|_p \|u\|_q$ 从而 $\|f\| = \|u\|_q$. 唯一性显然.定理: 设 $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\forall f \in (L^p(a, b))^*$, $\exists! y$ $\in L^q(a, b)$ 使得

$$(x), f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt \quad \forall x \in L^p(a, b)$$

以及 $\|f\| = \|y\|_q$ 反之 $\forall y \in L^q(a, b)$, 定义 $f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt$ 则 $f \in (L^p(a, b))^*$, 定义 $T: (L^p(a, b))^* \rightarrow L^q(a, b): f \rightarrow y$ 则 T 为保范同构.Proof ①保范及唯一性.

首先设(1)成立, 则由

$$|f(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

知 $\|f\| \leq \|y\|_q$. 另一方面, 由 $y \in L^q$ 知取 $x = |y|^{q-2} y$

$$\text{有 } f(x) = \int_a^b |y|^q dt$$

$$\text{以及 } \|x\|_p = \left(\int_a^b |y|^q dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$$\text{从而 } f(x) = \|y\|_q^p \leq \|f\| \|x\|_p$$

CUE

从而 $\|f\| = \|y\|_q$. 若 $y_1, y_2 \in L^q$ 满足

$$f(x) = \int y_1 x = \int y_2 x$$

$$\text{则 } \int (y_1 - y_2) x = 0$$

取 $x = |y_1 - y_2|^{q-2} (y_1 - y_2)$, 则有 $\|y_1 - y_2\|_q = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.② y 的存在性. f 绝对连续.设 $\gamma(t) = f(\chi_{[a, t]})$, 我们来证明 γ 绝对连续从而 $y = \gamma'$ 即为我们所求. $\forall \{[a_i, b_i]\}_1^N$ 为 $[a, b]$ 中不相交的区间, 记

$$\chi_j(t) = \chi_{[a_i, b_i]}(t)$$

$$\text{则 } \theta_j = \arg f(\chi_j)$$

$$\text{则 } |f(\chi_j)| = |f(\chi_j) e^{-i\theta_j}| = |f(\chi_j e^{-i\theta_j})|$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \sum_{j=1}^N |f(\chi_j) - \gamma(a_j)| &= \sum_{j=1}^N |f(\chi_j)| \\ &= \sum_{j=1}^N |f(\chi_j e^{-i\theta_j})| = |f(\sum_{j=1}^N \chi_j e^{-i\theta_j})| \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^N |\sum_{j=1}^N \chi_j e^{-i\theta_j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^N (b_j - a_j)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

故 $\gamma(t)$ 绝对连续, 故由微积分基本定理知 $\exists y \in L^1$

$$y = \gamma' \text{ a.e.}, \quad \gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b y \chi_{[a, t]} ds$$

③对特征函数及简单函数.

$$\forall (c, a) \subset (a, b)$$

$$f(\chi_{(c, a)}) = \gamma(a) - \gamma(c) = \int_a^b y \chi_{(c, a)} ds.$$

Summary

Summary

由积分及 f 的线性性, 对任意简单函数有

$$f(\varphi) = \int_a^b \varphi$$

④ 有界函数.

对任意有界可测函数 f , 由简单函数逼近

定理, $\exists \{\varphi_j\}$ 简单函数

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_j, \varphi_j \rightarrow f \text{ uniformly}$$

$$\text{从而 } \|\varphi_j - \varphi_k\|_p \rightarrow 0.$$

$$\text{故 } f(\varphi_j) \rightarrow f(\varphi).$$

并由 $|\varphi_j| \leq |\varphi|$ 及 Lebesgue 控制收敛定理

$$\int \varphi_j \rightarrow \int \varphi$$

$$\text{从而 } f(\varphi) = \int \varphi \quad \forall \varphi \text{ 有界}$$

⑤ $y \in L^q$

$\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 记 $E_n = \{t: |y(t)| \leq n\}$. 由

$$\int \varphi y = f(\varphi) \leq \|f\| \cdot \|\varphi\|$$

$$\text{令 } \varphi = |y|^{q-2} \cdot y \chi_{E_n}$$

$$\left(\int_{E_n} |y|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

由 Fatou 引理

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |y|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \liminf \left(\int_{E_n} |y|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

$$\text{故 } \|y\|_q \leq \|f\|, \text{ 从而 } y \in L^q.$$

⑥ 对 $x \in L^p$.

$\forall x \in L^p$, 记 $x_n = \chi_{E_n} x$, 则

$$\|x_n - x\|_p \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

$$\text{并且 } \left| \int_a^b (x_n - x)y \right| \leq \|x_n - x\|_p \|y\|_q \rightarrow 0.$$

$$\text{从而 } f(x) = \int_a^b x y$$

综上, 命题得证.

定理: 设 X 为赋范线性空间, 若 X^* 可分, 则 X 可分.

Proof. 由 X^* 可分知, $\exists \{g_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\overline{\{g_n\}_{n=1}^\infty} = X^*$$

由范数定义知, $\forall n \geq 1, \exists x_n \in X$ 满足

$$|g_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|g_n\|, \quad \|x_n\| = 1.$$

则 $Y = \text{span}\{x_n\}$ 可分. 断言: $\overline{Y} = X$, 事实上, 令

$f \in X^*$ 满足

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in Y$$

则由 $\overline{\{g_n\}} = X^*$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得

$$\|f - g_N\| < \varepsilon.$$

$$\text{但 } g_N(x_N) = \langle g_N, f \rangle \geq \frac{1}{2} \|g_N\|$$

$$\text{故 } \|f\| \leq \|f - g_N\| + \|g_N\| \leq \varepsilon + 2 \langle g_N, f \rangle$$

$$\leq \varepsilon + 2 \|f - g_N\| \cdot \|x_N\| = 3\varepsilon.$$

$$\text{从而 } \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0.$$

CUE

Summary

CUE

自反空间

定义: 设 X 为赋范线性空间, X^* 为 X 的对偶空间, 称 $(X^*)^*$

为 X 的二次对偶, 记为 X^{**}

$\forall x \in X$, 定义 $\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*$

则 $\langle Jx, \alpha f + \beta g \rangle = \langle \alpha f + \beta g, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle g, x \rangle$
 $= \alpha \langle Jx, f \rangle + \beta \langle Jx, g \rangle$

从而 Jx 为 X^* 上的线性泛函.

并且 $|\langle Jx, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \cdot \|x\|$

从而 $Jx \in (X^*)^*$, $\|Jx\| \leq \|x\|$.

又 $\forall x \neq 0$, $\exists f_0 \in X^*$ 使得

$$f_0(x) = \|x\|, \quad \|f_0\| = 1$$

故 $\langle Jx, f_0 \rangle = \langle f_0, x \rangle = \|x\|$

$$\Rightarrow \|Jx\| \geq \|x\|$$

故 $\|Jx\| = \|x\|$.

综上: $J: X \rightarrow X^{**}$ 为保范线性映射.

定义: 设 X 为赋范线性空间, 若 $J(X) = X^{**}$, 称 X 为自反

的, $J: X \rightarrow X^{**}$ 为典型映射

定理: 有限维子空间自反.

定理: 设 $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则 $L^p(\Omega)$ 自反.

Proof: 只要证明 $\forall f \in (L^p)^{**}$, $\exists u \in L^p$ 使得

Summary

CUE

$$\langle T, f \rangle = \langle f, u \rangle \quad \forall f \in (L^p)^*$$

即可. $\forall f \in (L^p)^*$, $\exists y_f \in L^q$ 使得

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} y_f v \quad \forall v \in L^p.$$

记 $(L^p)^* \rightarrow L^q$ 的等距同构为 T , 即.

$$T: (L^p)^* \rightarrow L^q$$

$$f \mapsto y_f$$

$$\text{则 } \langle F, f \rangle = \langle F, T y_f \rangle = \langle F \circ T^{-1}, y_f \rangle$$

$$\text{从而 } |\langle F \circ T^{-1}, y_f \rangle| \leq |\langle F, f \rangle| \leq \|F\| \cdot \|f\|$$

$$= \|F\| \cdot \|y_f\|$$

$$\text{故 } \|F \circ T^{-1}\| \leq \|F\| \Rightarrow T \circ T^{-1} \text{ 为 } L^q \text{ 上的线性泛函}$$

故 $\exists u \in L^p$ 使得

$$\langle F \circ T^{-1}, v \rangle = \int_{\Omega} v u \quad \forall v \in L^q$$

特别的

$$\begin{aligned} \langle F, f \rangle &= \langle F \circ T^{-1}, y_f \rangle = \int_{\Omega} y_f u \\ &= \langle f, u \rangle. \end{aligned}$$

定理: 设 X 为自反的赋范线性空间, 则 X 的任一闭子

空间也自反.

证明: 设 X_0 为 X 闭子空间, 只需证明 $\forall Z_0 \in X_0^{**}$, $\exists x \in X_0$

使得 $\langle Z_0, f_0 \rangle = \langle f_0, x \rangle \quad \forall f_0 \in X_0^*$.

考虑 X 在 X_0 上的限制算子 $Tf = f|_{X_0} \quad \forall f \in X^*$

Summary

CUE

$$\text{则 } \|Tf\| \leq \|f\|$$

从而 $T \in \mathcal{L}(X^*, X_0^{**})$, 则 $T^* Z_0 = Z \in X^{**}$

由 X 自反知, $\exists x \in X$ 使得

$$\langle Z, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*$$

断言: $x \in X_0$, 若不然 $x \notin X_0$ 由 X_0 闭及 Hahn-Banach 知 $\exists \tilde{f} \in X^*$

$$\begin{cases} \tilde{f}(x_0) = \text{dist}(x, X_0) > 0 \\ \tilde{f}(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{从而 } 0 = \langle Z_0, Tf \rangle = \langle Z, f \rangle = \langle f, x \rangle = \text{dist}(x, X_0) > 0$$

矛盾! 从而 $x \in X_0$. $\forall f_0 \in X_0^*$, 由 Hahn-Banach 定理知

$\exists f \in X^*$ 使得 $f_0 = Tf$, 故

$$\langle Z_0, f_0 \rangle = \langle Z_0, Tf \rangle = \langle Z, f \rangle$$

$$= \langle f, x \rangle = \langle f_0, x \rangle \quad \forall f_0 \in X_0^*$$

至此命题得证.

Summary

弱序列与弱*序列

定义: 设 X 赋范线性空间, $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$, 若

$$\lim \langle f, x_n \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in X^*$$

称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 , 记为 $w\text{-}\lim x_n = x_0$ 或 $x_n \rightharpoonup x_0$

命题: 弱收敛唯一:

$$\text{Proof: } f(x) = f(y) \quad \forall f \in X^* \Leftrightarrow f(x-y) = 0 \quad \forall f \in X^* \\ \Leftrightarrow x-y = 0$$

命题: 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛.

$$\text{Proof: } |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\| \quad \forall f \in X^* \\ \text{立即得到.}$$

例: $X = L^1(0,1)$, $x_n = \sin(n\pi x)$, 则 $\forall y \in L^\infty(0,1)$.

由 Riemann-Lebesgue 定理

$$\int_0^1 y(x) \sin(n\pi x) dx \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

例: $X = \ell^1(1 < p < \infty)$, $x_n = e_n, \|e_n\| = 1$.

$$\sum y_n e_n = y_n \rightarrow 0.$$

定理: 若 X 为有限维赋范线性空间, 则

$$\text{强收敛} \Leftrightarrow \text{弱收敛.}$$

Proof: 只需证明充分性. 设 $\dim X < \infty$, 则设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 X 的一组基, 故 $\exists \{f_i\}_{i=1}^n \subset X^*$ 使得 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$

$$\text{故若 } x^{(n)} = \sum x_j^{(n)} e_j \rightarrow x = \sum x_j e_j$$

CUE

则 $\forall i \leq n$

$$f_i(x_i^{(n)}) = x_i^{(n)} \rightarrow x_i$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$$

$$|x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, i \leq n$$

$$\text{故 } \|x^{(n)} - x\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| |x_i^{(n)} - x_i|$$

$$< \varepsilon \cdot \max \|e_i\|$$

定义: 设 $E \subset X$, 称 E 弱序列闭包 $\{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x_0$
有 $x_0 \in E$.

定理: 赋范线性空间 X 中的闭凸集都是弱序列闭的.

Proof: $\forall \{x_n\} \subset E, E$ 闭凸集, $x_n \rightarrow x$, 断言: $x \in E$

若不然, $\{x\} \cap E = \emptyset$, 由 Ascoli 定理, $\exists f \in X^*$

$$\text{使得 } f(x) > \sup_{y \in E} f(y) \quad \forall y \in E$$

$$\text{从而 } f(x) > r \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

推论: 设 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $x_0 \in \overline{\text{conv}\{x_n\}}$

定义: 设 X^* 为 X 对偶空间, $\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

则称 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f , 记为 $f_n \xrightarrow{*} f$.

Remark: $\langle x, f_n \rangle = \langle f_n, x \rangle$.

弱收敛 $\Rightarrow$ 弱*收敛

" $\Leftarrow$ " 若 X 自反

Summary

CUE

定理: 设 X 为可分赋范线性空间, 则 X 中任意有界序列
都有弱*收敛子列.

Proof: 设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 X 的稠密集, $\forall \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, 满足 $\exists M$

$$\|f_n\| \leq M \quad \forall n \geq 1$$

则 $\forall k \geq 1$ 有

$$|f_n(x_k)| \leq \|f_n\| \|x_k\| \leq M \cdot \|x_k\|$$

从而对于任意给定的 $k \geq 1$, $\{f_n(x_k)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中有界, 从而

有收敛子列. 设 $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$ 收敛, 若已选出 $\{f_n^{(k)}\}$,

则存在 $\{f_n^{(k+1)}\}$ 的子列满足 $\{f_n^{(k+1)}(x_{k+1})\}$ 收敛.

则选出对角元 $\{f_n^{(k)}\}$ 满足

$$\{f_n^{(k)}(x_k)\} \text{ 收敛} \quad \forall k \geq 1$$

故 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\|x - x_N\| < \varepsilon / 3M.$$

则由 $\{f_n^{(k)}(x_N)\}$ 收敛知其 Cauchy 从而 $\exists M > 0$.

$$|f_n^{(k)}(x_N) - f_n^{(l)}(x_N)| < \varepsilon / 3 \quad \forall k, l > M$$

$$\text{从而 } |f_n^{(k)}(x) - f_n^{(l)}(x)| \leq |f_n^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x_N)|$$

$$+ |f_n^{(k)}(x_N) - f_n^{(l)}(x_N)| + |f_n^{(l)}(x_N) - f_n^{(l)}(x)|$$

$$< \varepsilon$$

故 $\{f_n^{(k)}(x)\}$ Cauchy $\forall x \in X$, 记

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x) \quad \forall x \in X$$

Summary

CUE

则易证 $f \in X^*$. 故

$$f_n^{(n)} \xrightarrow{w} f$$

定理: 自反空间中的单位球弱收敛列.

Proof: 设 $\{x_n\} \subset B_X$, 记 $Y = \overline{\text{span}\{x_n\}}$, 则 Y 可分, 由 X 自反知 Y 也自反. 设 $J: X \rightarrow X^{**}$ 为典范映射.则 $J(Y) = Y^{**} = (Y^*)^*$, 由 Y 可分和 $J(Y)$ 可分, 从而作为 Y^* 的对偶, Y^* 也可分而 $\{Jx_n\}$ 为 $J(Y)$ 中有界集, 由 Y^* 可分知其有收敛子列 $\{Jx_{n_j}\}$, 故 $\forall f \in Y^*$

$$\langle Jx_{n_j}, f \rangle \rightarrow \langle Jx_0, f \rangle \quad \forall f \in Y^*$$

$$\Rightarrow \langle f, x_{n_j} \rangle \rightarrow \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in Y^*$$

 $\forall g \in X^*, \exists f \in Y^*$ 故

$$\langle g, x_{n_j} \rangle = \langle f, x_{n_j} \rangle \rightarrow \langle f, x_0 \rangle \quad \forall g \in X^*$$

Summary

CUE

Banach 逆算子定理, 一致有界定理.

定义: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A: X \rightarrow Y$ 线性算子且 A 为双射, 则 A^{-1} 存在且为线性的.若 $A: X \rightarrow Y$ 线性, 若 A^{-1} 存在且有界, 称 A 为有界可逆的或正则算子 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 有界可逆 $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{L}(Y, X)$ s.t. $AB = I, BA = I$ $A \in \mathcal{L}(X, Y), B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ 有界可逆, 则 BA 有界可逆且

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

引理: 设 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 且 $R(A)$ 第二纲, 则 $\exists \delta > 0 \ B_Y(0, \delta) \subset$

$$\overline{AB_X(0, 1)} \quad (\Leftrightarrow 0 \in Y \text{ 为 } \overline{AB_X(0, 1)} \text{ 的内点.})$$

Proof. 由于 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0, n)$, 故

$$R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} AB_X(0, n)$$

故由 $R(A)$ 为第二纲知 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\text{Int}(\overline{AB_X(0, n_0)}) \neq \emptyset.$$

故 $\exists y_0 \in Y, \varepsilon > 0$ 使得

$$B_Y(y_0, \varepsilon) \subset \overline{AB_X(0, n_0)}$$

故 $\forall y \in B_Y(0, \varepsilon), y_0 \pm y \in B_Y(y_0, \varepsilon) \subset \overline{AB_X(0, n_0)}$ 故 $\exists \{x_n\}, \{x'_n\} \subset B_X(0, n_0)$

$$\left. \begin{aligned} Ax_n &\rightarrow y_0 + y \\ Ax_{n'} &\rightarrow y_0 - y \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\left(\frac{x_n - x_{n'}}{2}\right) \rightarrow y$$

Summary

CUE

从而 $B(0, \varepsilon) \subset \overline{AB(0, \eta_0)}$, 令 $\delta = \varepsilon/\eta_0$.则 $B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, 1)}$ 定义: 若 $\{x_n\} \subset X$ 且 $\sum \|x_n\| < +\infty$, 则称 $\sum x_n$ 绝对收敛.引理: X 为 Banach 空间 $\Leftrightarrow$ 绝对收敛的级数均收敛.Proof. " $\Rightarrow$ " 设 $\sum x_n$ 绝对收敛, 记 $y_N = \sum_{n=1}^N x_n$, 则 $\{y_N\}$

Cauchy, 从而收敛.

" $\Leftarrow$ " 设 $\{x_n\}$ Cauchy, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$$

从而 $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 绝对收敛, 从而收敛, 即 $\{x_{n_k}\}$ 收敛, 故 $\{x_n\}$ 收敛.引理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 且 $R(A)$ 第二纲, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $B_Y(0, \varepsilon_0) \subset \overline{AB(0, 1)}$ Proof. 由 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $R(A)$ 第二纲知, $\exists \delta > 0$ 使得 $B_Y(0, 2\delta) \subset \overline{AB(0, 1)}$. $\forall y \in B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, 1/2)}$, $\exists z_1 \in B(0, 1/2)$

$$\|y - Az_1\| < \frac{\delta}{2} \quad \|z_1\| < \frac{1}{2}$$

对于 $y - Az_1 \in B(0, \delta/2) \subset \overline{AB(0, 1/4)}$, $\exists z_2 \in B(0, 1/4)$

$$\|y - Az_1 - Az_2\| < \frac{\delta}{4}, \quad \|z_2\| < \frac{1}{4}$$

对于 $y - A \sum_{i=1}^{k-1} z_i \in B(0, \delta/2^{k-1}) \subset \overline{AB(0, 1/2^k)}$, $\exists z_k \in B(0, 1/2^k)$

CUE

$$\|y - A(\sum_{i=1}^k z_i)\| < \frac{\delta}{2^k} \quad \|z_k\| < \frac{1}{2^k}$$

故得一列 $\{z_k\} \subset X$, 并且由

$$\sum \|z_k\| < \sum \frac{1}{2^k} = 1$$

知 $\sum z_k$ 绝对收敛, 并且 $y = \sum A z_k$, ~~$\|z_k\| < 1$~~ 从而 $y = A(\sum z_k)$ 故

$$B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, 1)}.$$

定理(Banach逆算子定理) 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 双射,则 A 有界可逆.Proof. 由 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $R(A) = Y$ 为 Banach 空间, 由 Baire 定理 $R(A)$ 为第二纲, 从而 $\exists \delta > 0$ 使得

$$B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, 1)}$$

故 $\forall y \in B(0, \delta)$, $\frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\delta}{2} \in B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, 1)}$ 从而 $\|A^{-1}(\frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\delta}{2})\| < 1$

$$\text{即} \quad \|A^{-1}y\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\|$$

即 A^{-1} 有界, 从而 A 有界可逆.定理(开映射定理) 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $R(A)$ 第二纲, 则 A 为开映射.Proof. $\forall 0 < X$ -开集, 则 $\exists x_0 \in O$ 使得

$$B(x_0, \varepsilon) \subset O$$

又 X Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $R(A)$ 第二纲知, $\exists \delta > 0$

Summary

Summary

CUE

使得

$$B(0, \delta) \subset A B(0, 1).$$

$$\Rightarrow B(Ax_0, \delta) \subset A B(x_0, 1)$$

$$\Rightarrow B(Ax_0, \varepsilon\delta) \subset A B(x_0, \varepsilon) \subset A(0)$$

故 $A(0)$ 为开集.定理(等价范数定理). 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为线性空间上的2个范数, 若 $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ 为 Banach 空间, 且 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

Proof. 定义线性映射:

$$T: (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

$$x \longmapsto x$$

从而由 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$ 知 $\exists C > 0$

$$\|Tx\|_2 \leq C \|x\|_1$$

由 Banach 逆算子定理知 T^{-1} 有界, 故 $\exists C'$ 使得

$$\|T^{-1}x\|_1 \leq C' \|x\|_2$$

$$\text{即 } \frac{1}{C'} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C' \|x\|_2.$$

即 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.定理(闭图像定理) 设 X, Y 为 Banach 空间, $A: X \rightarrow Y$ 为线性算子若 A 的图像

$$G(A) = \{[x, Ax] : x \in X\}$$

Summary

CUE

为 $X \times Y$ 中的闭集, 则称 A 为闭算子. 在 X 上另外与定义的闭算子必有界.Remark. 要说明 $A: D(A) \rightarrow Y$ 为闭算子, 则

$$x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y \Rightarrow x \in D(A), y = Ax.$$

Proof. 在 Banach 空间 $X \times Y$ 上则试证于以下范数

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

则若 $\{(x_n, y_n)\}$ Cauchy in $X \times Y$, 则由

$$\|x\|_X \leq \|(x, y)\|_1, \|y\|_Y \leq \|(x, y)\|_1$$

知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别在 X, Y 上 Cauchy, 从而收敛于 x, y , 即

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0, \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0$$

$$\text{故 } \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0$$

即 $(X \times Y, \|\cdot\|_1)$ 为 Banach 空间. 定义 $G(A)$ 为 $X \times Y$ 中的闭集, 从而也为 Banach 空间. 定义算子

$$T: G(A) \longrightarrow X$$

$$(x, y) \longmapsto x$$

则由 $D(A) = X$ 知 T 为满射, 单射, 故且

$$\|T(x, y)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_Y = \|(x, y)\|_1$$

从而 $T \in \mathcal{L}(G(A), X)$ 故由 Banach 逆算子定理知 $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, G(A))$, 即 $\exists C > 0$ 使得

Summary

CUE

$$\|x\|_X \leq C(\|x\|_Y + \|Ax\|_Z)$$

即 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Remark 若 X, Y 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 双射

$$G(A^{-1}) = \{(y, A^{-1}y) : y \in Y\}$$

$$\text{则 } (y_n, A^{-1}y_n) \rightarrow (y, x)$$

$$\Leftrightarrow y_n \rightarrow y, \quad A^{-1}y_n \xrightarrow{A^{-1}} x$$

$$\Rightarrow y_n = Ax_n \rightarrow Ax. \quad (A \text{ 连续性})$$

$$y_n \rightarrow y$$

$$\Rightarrow y = Ax \Rightarrow x = A^{-1}y$$

$$\Rightarrow (y, x) \in G(A^{-1})$$

从而 A^{-1} 为闭算子, 故 $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

定理(闭图定理) 设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范线性空间,

$\{T_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, 若 $\forall x \in X$ 有

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$$

$$\text{则 } \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Proof. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$X_n = \{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n\}.$$

则由 $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ ($\forall x$) 知

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

又 $\forall \{x_k\} \subset X_n, \quad x_k \rightarrow x$

CUE

$$\text{有 } \|T_i x_k\| \leq n \quad \forall k \geq 1, i \in I$$

令 $k \rightarrow \infty$ 由 $T_i \in \mathcal{L}(X, Y)$ 知

$$\|T_i x\| \leq n \quad \forall i \in I$$

$$\text{从而 } \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n \Rightarrow x \in X_n$$

故 X_n 闭, 而由 X 为 Banach 空间知 X 为第二纲集,

从而 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\text{Int } X_{n_0} \neq \emptyset$$

从而 $\exists B(x_0, \delta) \subset X_{n_0}$. 即有

$$\|T_i(x_0 + \delta z)\| \leq n_0 \quad \forall z \in B(0, 1), i \in I$$

$$\text{从而 } \delta \|T_i z\| \leq n_0 - \|T_i x_0\| \quad \forall z \in B(0, 1), i \in I$$

对 z 取上确界有

$$\delta \|T_i\| \leq n_0 - \|T_i x_0\|$$

$$\text{进一步有 } \sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{n_0 + \sup_{i \in I} \|T_i x_0\|}{\delta} < \infty.$$

推论: 设 X 为赋范线性空间, $\{x_n\} \subset X, x_n \rightarrow x$, 则 $\{x_n\}$ 有界.

Proof. 由 $\mathbb{C}$ 完备知 X^* 为 Banach 空间. 故定义算子:

$$T_n: X^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f(x_n)$$

由 $x_n \rightarrow x$ 知 $\{T_n f\}$ 收敛, 从而有界, 即

$$\sup_{n \geq 1} |T_n f| < \infty$$

由 X^* 为 Banach 空间以及闭图定理知 $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$

Summary

Summary

CUE

$$\text{而 } \|T_n\| = \sup_{\|f\| \leq 1} f(x_n) = \|x_n\|$$

故 $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$ 即 $\{x_n\}$ 有界.

推论: 设 X 为 Banach 空间, $\{f_n\} \subset X^*$, $f_n \xrightarrow{*} f$, 则 $\{f_n\}$ 有界.

Proof 定义算子 $T_{f_n}: X \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto f_n(x)$$

由 $f_n \xrightarrow{*} f$ 知 $\forall x \in X$

$$\sup_{n \geq 1} |T_{f_n}(x)| < \infty$$

而 X 为 Banach 空间, 从而由共鸣定理知

$$\sup_{n \geq 1} \|T_{f_n}\| < \infty$$

$$\text{而 } \|T_{f_n}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T_{f_n}(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} f_n(x) = \|f_n\|.$$

定理: 设 X 为 Banach 空间, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, M 为 X

的稠密子集, 则 $\forall x \in X$, $A_n x \rightarrow A x$ 当且仅当

$$\textcircled{1} \sup \|A_n\| < \infty$$

$$\textcircled{2} \forall x \in M, A_n x \rightarrow A x$$

Proof: “ $\Rightarrow$ ”是显然的. 下证 “ $\Leftarrow$ ”

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in M$ 使得

$$\|x - y\| < \varepsilon/2B$$

其中 $B = \sup \|A_n\|$. 由 $A_n y \rightarrow A y$ 知 $\exists N \geq 1$

$\forall n \geq N$ 有 $\|A_n y - A y\| < \varepsilon/2$. 故

Summary

CUE

$$\begin{aligned} \|A_n x - A x\| &\leq \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - A y\| + \|A y - A x\| \\ &\leq 3 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

推论: X, Y 为线性赋范空间, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, 设 M^* 为 X^* 的稠密子集, 则 $\forall f \in X^*$, $f(x_n) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow$

$$\textcircled{1} \sup \|x_n\| < \infty$$

$$\textcircled{2} f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in M^*$$

Proof. 取 $A_n = f_n$, 即得.

Summary

Banach 共轭算子.

定义: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 定义 $A': Y^* \rightarrow X^*$

$$\text{为 } \langle A'y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle \quad \forall x \in X, y^* \in Y^*$$

称 A' 为伴随 A 的 Banach 共轭算子.

命题: A' 为线性的, 有界的

Proof. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, y^*, z^* \in Y^*, x \in X$ 有

$$\langle A'(\alpha y^* + \beta z^*), x \rangle = \langle \alpha y^* + \beta z^*, Ax \rangle$$

$$= \alpha \langle y^*, Ax \rangle + \beta \langle z^*, Ax \rangle = \alpha \langle A'y^*, x \rangle + \beta \langle A'z^*, x \rangle$$

$$\text{即 } A'(\alpha y^* + \beta z^*) = \alpha A'y^* + \beta A'z^*.$$

$$\forall y^* \in Y^*, x \in X$$

$$\langle A'y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle \leq \|y^*\| \|Ax\|$$

$$\Rightarrow \|A'y^*\| \leq \|A\| \cdot \|y^*\| \Rightarrow \|A'\| \leq \|A\|.$$

命题: 定义 $T: \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$

$$A \mapsto A'$$

$$\text{则 } ① T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$$

$$② T(\text{Id}_X) = \text{Id}_{X^*}$$

$$③ T(AB) = T(A)T(B)$$

$$④ \text{若 } A \text{ 有界可逆, 则 } T(A) \text{ 有界可逆且 } T(A^{-1}) = T(A)^{-1}$$

$$⑤ \|T(A)\| = \|A\|.$$

Proof. ① 已证.

CUE

② $\forall y \in Y^*, x \in X$, 则

$$\langle T(\text{Id}_X)y, x \rangle = \langle y, \text{Id}_X x \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\text{故 } T(\text{Id}_X) = \text{Id}_{Y^*}$$

③ $\forall y \in Y^*, x \in X$ 有

$$\begin{aligned} \langle T(AB)y, x \rangle &= \langle y, ABx \rangle = \langle A^*y, Bx \rangle \\ &= \langle B^*A^*y, x \rangle \end{aligned}$$

$$\text{即 } T(AB) = T(B)T(A)$$

④ 倘若 A 有界可逆, 则 $A \cdot A^{-1} = \text{Id}_X$, 从而

$$T(AA^{-1}) = T(\text{Id}_X) = \text{Id}_{Y^*}$$

$$\text{故 } T(AA^{-1}) = T(A^{-1})^* T(A)$$

$$\text{从而 } T(A)^{-1} = T(A^{-1})$$

⑤ $\|T(A)\| \leq \|A\|$ 已证, 另一方面 $\forall y \in Y^*, x \in X$

$$\langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle \leq \|A^*\| \|y\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle y, Ax \rangle \leq \|A^*\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\| = \|T(A)\|$$

$$\text{从而 } \|T(A)\| = \|A\|.$$

例: 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $K(x, y): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, $\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < +\infty$.

$$\text{定义 } (Au)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) d\mu(y)$$

$$\forall u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

Summary

CUE

则 $\forall v \in L^2(\Omega, \mu)$ 有

$$|\iint K(x, y) u(y) v(x) d\mu(x) d\mu(y)|$$

$$\leq \|K(x, y)\|_2 \left(\int_{\Omega} |u(y)|^2 d\mu(y) \int_{\Omega} |v(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|K(x, y)\|_2 \|u\|_2 \|v\|_2$$

$$\text{从而 } \|Au\|_2 \leq \|K(x, y)\|_2 \cdot \|u\|_2$$

又 $\forall f \in (L^2)^*$, $\exists y \in L^2$ 使得

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} u y$$

$$\text{从而 } \langle A^*f, u \rangle = \langle f, Au \rangle$$

$$= \int_{\Omega} Au(x) y_f(x) d\mu(x)$$

$$= \iint_{\Omega \times \Omega} K(x, y) u(y) y_f(x) d\mu(y) d\mu(x)$$

$$= \int_{\Omega} u(y) \left(\int_{\Omega} K(x, y) y_f(x) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

$$\Rightarrow A^*f(x) = \int_{\Omega} K(x, y) y_f(y) d\mu(y)$$

定理(闭值域定理) 设 X, Y 为线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A^* 为 A 的 Banach 共轭算子, 则

$$\textcircled{1} N(A^*) = \overline{R(A)}^{\perp}$$

$$\textcircled{2} \overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$$

$$\textcircled{3} \overline{R(A)} \text{ 或 } N(A)^{\perp}$$

Summary

若 X 自反, 则 $\overline{R(A')} = N(A)^\perp$.

$$\textcircled{4} \quad N(A) = \overline{R(A')}^\perp$$

Proof. ① $y \in N(A') \Leftrightarrow A'y = 0$

$$\Leftrightarrow \langle A'y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow \langle y, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow y \in R(A)^\perp$$

$$\textcircled{2} \quad x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle y, Ax \rangle = 0 \quad \forall y \in Y^*$$

$$\Leftrightarrow \langle A'y, x \rangle = 0 \quad \forall y \in Y^*$$

$$\Leftrightarrow x \in R(A')$$

② 由 $(R(A')^\perp)^\perp = \overline{R(A)}$ 立即得到

③ 由 $(R(A')^\perp)^\perp \supset \overline{R(A)}$ 得到

若 X 自反, 则 $X = X^{**}$, 从而由③.

引理: 设 E 赋范线性空间, $M \subset E$, 定义

$$M^\perp = \{f \in E^*: \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in M\}$$

$N \subset E^*$, 定义

$$N^\perp = \{x \in E: \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in N\}$$

则 $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$, $(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$.

Proof. 由于 $(M^\perp)^\perp = \{x \in E: \langle f, x \rangle = 0, \forall f \in M^\perp\}$

故 $\forall f \in M^\perp, x \in M$, 有

$$\langle f, x \rangle = 0.$$

从而 $x \in (M^\perp)^\perp \Rightarrow M \subset (M^\perp)^\perp$, 又

$$(M^\perp)^\perp = \bigcap_{f \in M^\perp} f^{-1}(\{0\})$$

故 $(M^\perp)^\perp$ 闭, 故 $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$. 反设 $\overline{M} \neq (M^\perp)^\perp$

则 $\exists x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$, 由 $\overline{M}$ 闭及 Hahn-Banach 定理

$\exists f \in E^*$ 使得

$$\begin{cases} f(\overline{M}) = 0 \\ f(x_0) = d = \text{dist}(x_0, \overline{M}) \\ \|f\| = 1 \end{cases}$$

从而 $f(\overline{M}) = 0$ 知 $f \in M^\perp$. 一方面, 由 $x_0 \in (M^\perp)^\perp$

知 $\langle f, x_0 \rangle = 0$

另一方面 $\langle f, x_0 \rangle = d > 0$, 矛盾!

从而 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$. 同理 $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$.

若 X 自反, 则

$$\begin{aligned} (N^\perp)^\perp &= \{f \in E^*: \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in N^\perp\} \\ &= \{f \in E^*: \langle Jx, f \rangle = 0 \quad \forall x \in (N^\perp)^{**}\} \end{aligned}$$

故亦可应用 Hahn-Banach 定理于 $(N^\perp)^\perp$, 故 $\overline{N}$

CUE

CUE

有界线性算子的谱

定义: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 A 的特征值, 若

$$(\lambda I - A)x = 0$$

有非零解, 称 x 为关于 λ 的特征向量, A 的特征值的集合称为 A 的点谱, 记为 $\sigma_p(A)$. 此时 $\lambda I - A$ 非单.

若 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ 为单射, 则

① $\lambda I - A$ 满, 则由 Banach 逆算子定理, $\lambda I - A$ 有界可逆, 称 λ 为 A 的正则点, $(\lambda I - A)^{-1}$ 称为 A 的预解式, 记为 $R(\lambda)$. A 的正则点集合称为 A 的正则集或预解集, 记为 $\rho(A)$.

② $R(\lambda I - A) \neq X$ 但 $\overline{R(\lambda I - A)} = X$

称 λ 为 A 的连续谱, 记为 $\sigma_c(A)$

③ $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$

称 λ 为 A 的剩余谱, 记为 $\sigma_r(A)$

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

记 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, 称为 A 的谱集, $\sigma(A)$ 中点称为 A 的谱点.

例: 设 $A = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2$ $X = C([0, 1])$

$$D(A) = \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Summary

Summary

CUE

则 $\lambda_n = (n\pi)^2$ $x_n = \sin(n\pi t)$ $n \geq 1$

例: $X = C([0,1])$, 定义 $A: X \rightarrow X$ 为

$$Au(t) = tu(t)$$

$$\text{若 } -(A - \lambda I)u(t) = (\lambda - t)u(t) = 0.$$

则 $\forall t \neq \lambda, u(t) = 0$. 且 $u \in C([0,1])$ 故

$$u = 0. \quad \forall t \in [0,1]$$

从而 $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A$ 单射 $\Rightarrow \sigma_p(A) = \emptyset$

$\forall \lambda \notin [0,1], \forall u \in X$ 有

$$(\lambda I - A)\left(\frac{u}{\lambda - t}\right) = u$$

且 $\frac{u}{\lambda - t} \in C([0,1])$ 从而

$$\mathbb{C} \setminus [0,1] \subset \rho(A).$$

$$\Rightarrow \sigma(A) \subset [0,1].$$

$$\forall \lambda \in [0,1] \text{ 则 } (\lambda I - A)u(\lambda) = 0 \quad \forall u \in X$$

从而 $R(\lambda I - A) \neq C([0,1])$

$$\text{且 } \overline{R(\lambda I - A)} \neq C([0,1])$$

从而 $\forall \lambda \in [0,1] \quad [0,1] \subset \sigma(A) \Rightarrow [0,1] = \sigma(A)$

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [0,1]. \quad \sigma_r(A) = [0,1]$$

定理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| < 1$, 则

$I - A$ 有界可逆且 $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$,

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Summary

CUE

证: 考虑 $S_n = \sum_{i=0}^n A^i$, 则

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|A^i\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty$$

从而 S_n 绝对收敛, 故 $\sum_{i=0}^{\infty} A^i \in \mathcal{L}(X)$ 且直接验证

$$\text{证有 } \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i\right)(I - A) = (I - A)\left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i\right) = I$$

定理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 则

① $\rho(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中开集, $\sigma(A)$ 为闭集

② 有界可逆线性算子为 $\mathcal{L}(X)$ 中开集

③ 若 A 有界可逆, 则 $A \rightarrow A^{-1}$ 为连续映射.

证: ①. $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$, 则 $\lambda_0 I - A$ 有界可逆, $\lambda \in \rho(A)$

当且反当为

$$(\lambda I - A)u = f$$

有解, 当且反当

$$u = (\lambda_0 I - A)^{-1}(f + (\lambda_0 - \lambda)u)$$

$$\text{故当 } \|\lambda - \lambda_0\| \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| < 1$$

时由压缩映射定理

②. 令 $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, 则

$$\|I - A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < 1$$

从而 $A^{-1}B$ 可逆, 进而 $B = A(A^{-1}B)$ 可逆.

③. $\forall A$ 有界可逆, 由② $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B$ 可逆

$$\text{此时 } \|I - A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < \frac{1}{2}$$

Summary

CUE

进而

$$\|B^{-1}\| \leq \|B^{-1}A\| \|A^{-1}\| = \|(CA^{-1}B)^{-1}\| \|A^{-1}\|$$

$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{1 - \|A^{-1}B\|} < 2\|A^{-1}\|$$

$$\text{从而 } \|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \|A - B\|$$

$$< 2\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|.$$

定理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

存在, 记为 $r(A)$.Proof. 若 $\|A\|=0$, 则结论显然. 下设 $\|A\|>0$.

$$\text{由 } \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \inf_{n \geq 1} \|A\|^{\frac{1}{n}} \text{ 知}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \inf_{n \geq 1} \|A\|^{\frac{1}{n}}.$$

记 $r(A) = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$r(A) \leq \|A^N\|^{\frac{1}{N}} \leq r(A) + \varepsilon.$$

则 $\forall n \geq N, \exists p, r \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$n = pN + r, \quad 0 \leq r < N$$

$$\text{从而 } \|A^n\| = \|A^{pN+r}\| \leq \|A^{pN}\| \cdot \|A^r\|$$

$$\leq (r(A) + \varepsilon)^{pN} \cdot \|A\|^r$$

$$= (r(A) + \varepsilon)^{n-r} \cdot \|A\|^r$$

$$\text{故 } \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(A) + \varepsilon.$$

由 ε 任意性立得.

Summary

CUE

推广: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 则① $|\lambda| > r(A)$ 时 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

② 对 $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ 时 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda_0 I - A)^{-n-1} (\lambda - \lambda_0)^n$$

$$\text{其中 } r_{\lambda_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda_0 I - A)^{-n}\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\lambda_0}(A)\|^{\frac{1}{n}}.$$

③ $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(A)\}$ Proof ① 由 $|\lambda| > r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 知, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\forall n \geq n_0 \text{ 有 } \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < \frac{|\lambda|}{2} \Rightarrow \left\| \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \right\| < \frac{1}{2}$$

~~级数~~

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} < r(A) + \varepsilon \Rightarrow \|A^n\| < (r(A) + \varepsilon)^n$$

其中 $\varepsilon = |\lambda| - r(A)$, 从而

$$\left\| \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \right\| \leq \left(\frac{r(A) + \varepsilon}{|\lambda|} \right)^n.$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$ 绝对收敛, 从而收敛, 直接验证

$$\text{证有 } \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = (\lambda I - A)^{-1}.$$

② 注意到 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A$$

$$= (\lambda_0 I - A)(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1})$$

$$= (\lambda_0 I - A)(I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(A))$$

$$\text{故当 } |\lambda - \lambda_0| < r(R_{\lambda_0}(A)) \text{ 时 } = |\lambda_0 - \lambda| r(R_{\lambda_0}(A))$$

Summary

时 $(I - (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}(A))$ 可逆, 且逆为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}(A)^n$$

$$\text{从而 } (\lambda I - A)^{-1} = (I - (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}(A))^{-1} (\lambda_0 I - A)^{-1} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}(A)^{n+1}$$

③ 由①知 $\mathbb{C} \setminus (\overline{R(A)}, \overline{R(A)}) \subset \rho(A)$

$$\text{从而 } \sigma(A) \subset \overline{R(A)} \cup \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq \overline{R(A)}\}$$

例: $X = C([0, 1])$, 定义 $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$, 则

$$(Ax)(t) \leq \|x\| t$$

$$(A^2 x)(t) \leq \|x\| \frac{t^2}{2!}$$

$$(A^n x)(t) \leq \|x\| \frac{t^n}{n!} \leq \|x\| \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \|A^n\| \leq \frac{1}{n!} \rightarrow 0$$

$$\text{故 } r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 0, \text{ 从而}$$

$$\sigma(A) \subset \{0\}$$

而 $1 \notin R(A)$, 从而 $0 \in \sigma_r(A)$.

定义: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 称 $\sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda|$ 为 A 的谱半径.

Remark: 由上一个推论知:

$$\sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda| \leq r(A).$$

引理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, $f \in (\mathcal{L}(X))^*$,

则 $f(R_\lambda(A))$ 为 $\rho(A)$ 上的解析函数.

Proof ① 由复可导证明.

$\forall \lambda_0 \in \rho(A)$, 由 $\rho(A)$ 为开集知, $\exists \delta > 0$ $B(\lambda_0, \delta) \subset \rho(A)$.

从而 $\forall \lambda \in B(\lambda_0, \delta)$ 有

$$\frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ = \frac{(\lambda_0 I - A)^{-1} ((\lambda_0 I - A) - (\lambda I - A)) (\lambda I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ = -(\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda I - A)^{-1}$$

$$\text{从而 } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} = -(\lambda_0 I - A)^{-2}$$

故 $\forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$, 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f(R_\lambda(A)) - f(R_{\lambda_0}(A))}{\lambda - \lambda_0} = -f((\lambda_0 I - A)^{-2})$$

即 $f(R_\lambda(A))$ 解析. $\forall \lambda \in \rho(A)$.

② 由展开证明.

$\forall \lambda_0 \in \rho(A)$, 由于 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{r(A)}$ 可推出,

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 I - A)^{-(n+1)}$$

从而 $\forall \lambda \in B(\lambda_0, \frac{1}{r(A)})$ 有

$$f(R_\lambda(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(R_{\lambda_0}(A)^{n+1}) (\lambda_0 - \lambda)^n \quad \forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$$

定理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 则 $\sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda| = r(A)$.

Proof. $\sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda| \leq r(A)$ 已证. 下证 $\sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda| \geq r(A)$.

注意到 $\forall |\lambda| > \sup_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda|$, $\lambda \in \rho(A)$, 故 $(\lambda I - A)$ 可逆

从而 $\forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$ 有

$$f(R_\lambda(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(-\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right)$$

CUE

由 f 解析知

$$f\left(\frac{\lambda^n}{\lambda^n}\right) \rightarrow 0 \quad \forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$$

由吴喀定理: $\forall \lambda, \exists M, \lambda > 0$ 使得

$$\|A^n\| \leq M \lambda^{n/2}$$

故 $r(A) \leq \lambda$ 令 $\lambda \rightarrow \infty$ 得 $r(A) \leq \sup |r|$ 按定理: 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, A' 为 A 的 Banach

共轭算子, 则

$$\textcircled{1} \sigma(A) \neq \emptyset$$

$$\textcircled{2} \sigma(A) = \sigma(A'), \quad r(A) = r(A') \text{ 且}$$

$$R_\lambda(A') = R_\lambda(A)$$

Proof ① 反设 $\sigma(A) = \emptyset$, 则 $\rho(A) = \mathbb{C}$, 故 $\forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$, $f(R_\lambda(A))$ 为 $\mathbb{C}$ 上全纯函数, 但

$$|f(R_\lambda(A))| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{as } |\lambda| \rightarrow \infty$$

从而 $f(R_\lambda(A))$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 故由刘维尔定理知 $f(R_\lambda(A)) = 0, \forall f \in (\mathcal{L}(X))^*$, 故

$$R_\lambda(A) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

这与 $\lambda \in \rho(A)$ 矛盾!② 由于 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$((\lambda I - A)^{-1})' = ((\lambda I - A'))^{-1}$$

CUE

而 $\forall x, y \in X, y \in X^*$

$$\langle y, (\lambda I - A')^{-1} x \rangle = \langle (\lambda I - A) y, x \rangle$$

$$= \lambda \langle y, x \rangle - \langle Ay, x \rangle$$

$$= \lambda \langle y, x \rangle - \langle y, A' x \rangle$$

$$= \langle y, (\lambda I - A') x \rangle$$

故 $\lambda I - A' = (\lambda I - A)^{-1}$, 从而

$$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \lambda I - A \text{ 可逆} \Leftrightarrow (\lambda I - A)^{-1} = \lambda I - A' \text{ 可逆}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \rho(A')$$

Summary

算子基本性质.

定义: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A: X \rightarrow Y$ 为线性算子. 若

A 将 X 中有界集映为列紧集, 则称 A 为紧算子, 记 X 到 Y 所有紧算子的集合为 $\mathcal{C}(X, Y)$

全连续映射: 紧映射 + 连续.

命题: 紧算子为有界线性算子, 即 $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$

Proof. 取 $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, 则 $\forall A \in \mathcal{C}(X, Y)$, $A B_X$ 列

紧, 从而完全有界进而有界, 故

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in B_X} \|Ax\| < +\infty$$

从而 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

例: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为二元连续函数

$$\text{定义 } (Au)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy$$

则 $A: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ 为紧算子.

Proof. 对于任意 $C(\Omega)$ 的有界子集 $\mathcal{F}$, $\exists M > 0$ 使得

$$\|u\| \leq M \quad \forall u \in \mathcal{F}.$$

$$\text{则 } \|Au\| \leq \mu(\Omega) \|k(x, y)\| \cdot \|u\|$$

$$\leq \mu(\Omega) \|k(x, y)\| M$$

从而 $A\mathcal{F}$ 一致有界. 由 $k(x, y)$ 连续, $\Omega \times \Omega$ 闭且

$k(x, y)$ 一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \varepsilon / \mu(\Omega)$$

CUE

从而 $\forall u \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| < \delta &\Rightarrow |Au(x_1) - Au(x_2)| \\ &\leq \int_0^1 |u(y)| |k(x_1, y) - k(x_2, y)| dy \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

即 A 等度连续, 从而由 Ascoli - Arzela 知 A 为列紧, 进而 $A \in C(X)$.

例: 设 $X = Y = \ell^2$, 定义 $A: [x_i] \mapsto [x_i/i]$, 则 A 为紧算子.

Proof 设 $\mathcal{F} \subset X$ 为有界集, 即 $\exists M > 0$ 使得

$$\|x\|_2 \leq M \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ 使得

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \varepsilon/M.$$

即 $\forall x \in \mathcal{F}$ 有

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{1/2} \leq M \cdot \left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

从而 A 为列紧.

例: 设 X 为无穷维赋范线性空间, 则 $Id_X \notin C(X)$.

Proof 只需注意到单位球面不列紧.

定义: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A: X \rightarrow Y$ 为线性算子,

若 $\dim R(A) < \infty$, 则称 A 为有限秩算子.

CUE

Remark: $A: X \rightarrow Y$ 线性算子, 若 X 有限维, 则 A 为有限秩算子.

若 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为有限秩算子, 则 $A \in C(X, Y)$.

定理: 设 X, Y 为赋范线性空间, 则 $C(X, Y)$ 为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 的子空间, 若 Y 为 Banach 空间, 则 $C(X, Y)$ 为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 的闭子空间.

Proof $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A, B \in C(X, Y)$, 则 $\forall \{x_n\}$ 有界.

$\{Ax_n\}, \{Bx_n\}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_j}\}$, 对于 $\{x_{n_j}\}$,

$\{Bx_{n_j}\}$ 有收敛子列 $\{Bx_{n_{j_k}}\}$, 从而 $\{(\alpha A + \beta B)x_n\}$

有收敛子列 $\{(\alpha A + \beta B)x_{n_{j_k}}\}$, 从而 $\alpha A + \beta B \in C(X, Y)$.

进一步设 Y 为 Banach 空间. 令 $A_n \in C(X)$, $A_n \rightarrow A$, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_0$ 使得

$$\|A - A_N\| < \varepsilon/3$$

记 $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, 则由 A_N 为紧算子知 $A_N(B_X)$ 列紧, 从而完全有界, 故 $\exists$ 有限 $\varepsilon/3$ -网, 设为 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 即

$$A_N(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B(A_N x_i, \varepsilon/3)$$

则 $\forall x \in B_X, \exists x_i (1 \leq i \leq n)$ 使得

$$\|A_N x - A_N x_i\| < \varepsilon/3$$

故 $\|A x - A x_i\| < \varepsilon$

即 $\{x_i\}$ 为 $A B_X$ 的 ε -网, 由 Y 完备知 $A B_X$ 列紧.

Summary

Summary

CUE

例: 设 $X = \ell^1$ $A: \{x_i\} \mapsto \{\frac{x_i}{i}\}$.则 $A \in C(X)$ Proof 定义算子 $A_N: (x_i) \mapsto (x_i, \frac{x_i}{2}, \dots, \frac{x_i}{N}, \dots, 0, \dots)$ 则 A_N 为有穷秩算子, 从而 $\{A_N\} \subset C(X)$, 则 $\forall x \in B_X$ 有

$$\|A_N - A\| = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{N} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{N} \|x\| = \frac{1}{N}$$

故 $\|A - A_N\| \leq \frac{1}{N} \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ 故由 ℓ^1 完备及 $C(X)$ 闭包 $A \in C(X)$.定义: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 称 A 为全连续算子若 A 将 X 中弱收敛的点列映为 Y 中依范数收敛的点, 即: $\forall \{x_n\} \subset X, x_n \rightarrow x$ 有 $Ax_n \rightarrow Ax$.定理: 设 X, Y 为赋范线性空间.① 若 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 且 $x_n \rightarrow x$ 则 $Ax_n \rightarrow Ax$ ② 若 $A \in C(X, Y)$, 则 A 全连续.③ 若 X 自反, A 全连续, 则 $A \in C(X, Y)$.Proof ① 由 $x_n \rightarrow x$ 和 $\forall g \in X^*$

$$g(x_n) \rightarrow g(x)$$

故 $\forall f \in Y^*$, 令 $g = f \circ A$, 则由

$$|g(x_n) - g(x)| = |f(Ax_n) - f(Ax)| \leq \|f\| \cdot \|Ax_n - Ax\|$$

Summary

CUE

知 $g \in X^*$, 从而 $\forall f \in Y^*$

$$f(Ax_n) \rightarrow f(Ax)$$

即 $Ax_n \rightarrow Ax$.② 反设 Ax_n 不收敛于 Ax , 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $\{x_i\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \geq 1$ 从而由 $A \in C(X, Y)$ 知 $\{x_{n_k}\}$ 有界和 $\{Ax_{n_k}\}$ 有收敛子列. 设 $\|Ax_{n_{k_j}} - y\| \rightarrow 0$, 则 $Ax \neq y$ 则由 $x_n \rightarrow x$ 知 $Ax_n \rightarrow Ax$ 即 $Ax_{n_{k_j}} \rightarrow Ax$ 但由内知 $Ax_{n_{k_j}} \rightarrow y$ 由极限唯一性知 $y = Ax$, 矛盾!③ 由 X 自反和 B_X 弱列紧, 故 $\forall \{x_n\} \subset B_X, \exists \{x_{n_k}\}, x$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x$ 但 A 全连续, 故 $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$ 从而 $A \in C(X, Y)$ 定理: 若 $A \in C(X, Y)$, 则 $R(A)$ 可分.Proof 由于 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n)$, 而故 $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B(0, n))$ 由 $A \in C(X, Y)$ 和 $A(B(0, n))$ 列紧 $\Rightarrow A(B(0, n))$ 完全有界,

从而可分.

定理: 设 $A \in \mathcal{L}(X, Y), B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, 若 A, B 中有一个紧算子则 $BA \in C(X, Z)$

Summary

CUE

Proof. 若 B 是算子, 则 $\forall \tilde{B} \subset X$ 有界, 则 $\forall x \in \tilde{B}$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| < \infty$$

故 $A\tilde{B}$ 有界, 而 $B \in C(Y, Z)$ 从而 $BA(\tilde{B})$ 列紧.

若 A 是算子, 则 $\forall \{x_n\}$ 有界, $\exists \{x_{n_k}\}$ 及 $x \in X$

$$Ax_{n_k} \rightarrow Ax$$

由 B 有界知 $BAx_{n_k} \rightarrow BAx$.

定理: 设 X, Y 为 Banach 空间, 且 X, Y 至少有一个为无穷维,

若 $A \in C(X, Y)$ 为单射, 则 $R(A) \neq Y$

Proof. 由 Y 为 Banach, 反设 $R(A) = Y$, 则 A 为双射且

$Y = R(A)$ 为第二纲, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 故由 Banach 逆算

子定理知 A 有界可逆, 即 $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, 从而由

$A \in C(Y, X)$ 知 $AA^{-1}, A^{-1}A$ 均为算子, 这说明

Id_X, Id_Y 均为紧算子, 由于 X, Y 其中有一个为无穷维空间, 这是不可能的.

定理: 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \in C(X, Y)$, 若 $R(A)$ 无穷维, 则 $\overline{R(A)} \neq R(A)$.

Proof. 反设 $R(A) = \overline{R(A)}$, 则 $R(A)$ 为 Banach 空间 Y 的闭

子空间, 故 $A: X \rightarrow R(A)$

为满射, $R(A)$ 为 Banach 空间, 从而由上一个定理知这是不可能的.

Summary

CUE

定理: 设 X, Y 为赋范线性空间, $A \in C(X, Y)$, A' 为 A 的

Banach 共轭算子, 则 $A' \in C(X^*, Y^*)$

反之若 Y 为 Banach 空间, 则 $A' \in C(Y^*, X^*) \Rightarrow A \in C(X, Y)$

Proof. "⇒" 证法 ① Ascoli-Arzelà

由 $A \in C(X, Y)$ 知 $K = \overline{AB_X}$ 为紧集, 其中 B_X 为 X 中的单位球, 考虑 $C(K)$ 的子集

$$\mathcal{F} = \{\varphi_n \in C(K): \varphi: x \mapsto \langle \varphi_n, x \rangle\}$$

其中 $\{\varphi_n\} \subset B_{Y^*}$, 只需证明 $\{\varphi_n\}$ 有收敛子列即可. 由

K 为紧集知其有界, 记界为 M , 则

$$|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\| \cdot \|x\| \leq M \quad \forall n \geq 1$$

从而 $\|\varphi_n\|_{\infty} \leq M$ 即 $\mathcal{F}$ 有界, 并且 $\forall x, y \in K$, 有

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \|x - y\| \quad \forall n \geq 1$$

即 $\mathcal{F}$ 等度连续, 故由 Ascoli-Arzelà 知 $\mathcal{F}$ 列紧, 故 $\{\varphi_n\}$

有收敛子列, 设其收敛于 φ , 则

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in K} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$$

特别的

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_X} |\varphi_{n_k}(Tx) - \varphi(Tx)| &= \sup_{x \in B_X} |\langle \varphi_{n_k}, Tx \rangle - \langle \varphi, Tx \rangle| \\ &= \sup_{x \in B_X} |\langle T^* \varphi_{n_k}, x \rangle - \langle T^* \varphi, x \rangle| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_X} |\langle T^* \varphi_{n_k}, x \rangle - \langle T^* \varphi, x \rangle| \\ = \|T^* \varphi_{n_k} - T^* \varphi\| \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Summary

CUE

这说明 $\{T^*x_n\}$ 在 X^* 中 Cauchy, 而 X^* 为 Banach 空间, 从而 $\{T^*x_n\}$ 收敛.

证法②. 直接验证完全有界.

设 B_{Y^*} 为 Y^* 的单位球, 要证 $T^*B_{Y^*}$ 列紧, 由 X^* 完备只要证 $T^*B_{Y^*}$ 完全有界.

$$\Leftrightarrow \exists \{y_i^*\}, \forall y^* \in Y^*, \exists i$$

$$\|T^*y^* - T^*y_i^*\| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in B_X, \exists y_i^* \in Y^* \exists i$$

$$|\langle T^*y^* - T^*y_i^*, x \rangle| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in B_X, \exists \{y_i^*\}, \forall y^* \in Y^*, \exists i$$

$$|\langle y^* - y_i^*, x \rangle| < \varepsilon.$$

由于 $T \in C(X, Y)$ 故 TB_X 列紧, 从而完全有界. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \{x_j\}_n$ 使得 $\forall x \in B_X, \exists j$

$$\|Tx - Tx_j\| < \varepsilon/3$$

则 $Z = \text{span}\{x_j\}_n$ 有限维 $\Rightarrow Z^* \subset Y^*$ 有限维

故 Z^* 单位球列紧, $\exists \{y_i^*\}_n$ 使得 $\forall y \in B_{Y^*} \exists i$

$$\|y/z^* - y_i/z^*\| < \varepsilon/3\|z\|$$

断言 $\{y_i\}$ 为 B_{Y^*} 的有穷 ε -网. 事实上 $\forall x \in B_X, \exists$

k 使得 $\|Tx - Tx_k\| < \varepsilon/3$

$$\forall y^* \in Y^*, \exists i \quad \|y^*z - y_i^*z\| < \varepsilon/3\|z\|$$

Summary

CUE

进一步

$$|\langle y^* - y_i^*, Tx \rangle| = |\langle y^*z - y_i^*z, Tx \rangle|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3\|z\|} \cdot \|z\| \cdot \|Tx\| = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{故 } |\langle y^* - y_i^*, Tx \rangle| \leq |\langle y^*, Tx \rangle - \langle y_i^*, Tx \rangle| + |\langle y_i^*, Tx \rangle - \langle y_i^*, Tx \rangle|$$

$$< \varepsilon$$

至此命题得证.

"设 Y 为 Banach 空间及 $A' \in C(Y^*, X^*)$ 则

$A'' \in C(X^{**}, Y^{**})$, 设 $J, \tilde{J}$ 分别为 $X \rightarrow X^{**}, Y \rightarrow Y^{**}$

的典型映射, 则 $\forall x \in X, y^* \in Y^*$ 有

$$\langle A''Jx, y^* \rangle = \langle Jx, A'y^* \rangle$$

$$= \langle A'y^*, x \rangle$$

$$= \langle y^*, Ax \rangle = \langle \tilde{J}(Ax), y^* \rangle$$

从而 $A''J = \tilde{J} \circ A$

设 $\{x_n\}$ 为 X 中有界点列, 则 $\{J(x_n)\}$ 也有界, 从而

由 $A'' \in C(X^{**}, Y^{**})$ 知 $\{A''J(x_n)\}_{n=1}^\infty$ 有收敛子列

记为 $\{A''J(x_{n_k})\}$ 但 $A''J = \tilde{J} \circ A$, 故 $\{\tilde{J} \circ Ax_{n_k}\}$

收敛, 从而 $\{\tilde{J} \circ Ax_{n_k}\}$ Cauchy, 而 $\tilde{J}$ 为等距映射

故 $\{Ax_{n_k}\}$ Cauchy in Y , 而 Y 为 Banach 空间, 从而

$\{Ax_{n_k}\}$ 收敛.

Summary

CUE

CUE

Riesz - Schauder 理论.

本章中, 设 X 为 Banach 空间.定理: 设 $\dim X = \infty$, $A \in C(X)$, 则 $0 \in \sigma(A)$.定理: 设 $\lambda \neq 0$, $A \in C(X)$, 则 $\ker(\lambda I - A)$ 有限维.Proof: 若 $\dim X < \infty$, 则显然成立, 下证 $\dim X = \infty$ 证 $N = \ker(\lambda I - A)$, 则 $\forall x \in B_N(0, 1)$, 则由 $x \in N$ 知 $\lambda x = Ax$ 即 $x \in \frac{1}{\lambda} A(B_N(0, 1))$ $x = \frac{1}{\lambda} Ax \in \frac{1}{\lambda} A(B_N)$, 但 $A \in C(X)$, 故 $\overline{A(B_N)}$ 为紧集, 从而 $B_N(0, 1)$ 紧则 N 有限维.定理: 设 $\lambda \neq 0$, $A \in C(X)$, 则 $R(\lambda I - A)$ 闭.Proof: 由上个定理知 $N(\lambda I - A)$ 有限维. 令 $N = N(\lambda I - A)$ 则 N 为 X 的闭子空间, 考虑商空间及映射

$$T: X/N \longrightarrow R(\lambda I - A)$$

$$[x] \longmapsto (\lambda I - A)x$$

则 $\text{Im}(T) = R(\lambda I - A)$, 且 T 为双射, 并且 $\forall [x] \in X/N$ $\exists x_0 \in [x]$ 使得

$$[x] = \inf_{x \in [x]} \|x\| \geq \frac{1}{2} \|x_0\|$$

$$\text{故 } \|T[x]\| = \|(\lambda I - A)x_0\| = \|(\lambda I - A)x\|$$

$$\leq \|\lambda I - A\| \|x_0\| \leq 2 \|\lambda I - A\| \|x\|$$

即 $T \in \mathcal{L}(X/N, R(\lambda I - A))$. 要证 $R(T) = R(\lambda I - A)$ 闭, 只

Summary

Summary

CUE

需证明 $\exists \alpha > 0$ 使得

$$\|T\alpha\| > \alpha \| \alpha \|.$$

反设不存在这样的 α , 则 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\exists \| \alpha_n \| = 1$ 但 $\|T\alpha_n\| < \frac{1}{n}$ 而由 $\|T\alpha_n\|$ 定义知, $\exists y_n \in \mathbb{C}^n$

$$\text{使得 } \|T\alpha_n\| = \|T(\lambda I - A)y_n\| < \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\|y_n\| < 2\|T\alpha_n\| = 2/n$$

故由 $\|T\alpha_n\|$ 有界及 $A \in C(X)$ 知, $\exists \{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ 使得

$$Ay_{n_k} \rightarrow l$$

但由 (1) 知 $\lambda y_{n_k} - Ay_{n_k} \rightarrow 0$

$$\text{从而 } \lambda y_{n_k} \rightarrow \lambda y_{n_k} - Ay_{n_k} + Ay_{n_k} \rightarrow l$$

$$\text{即 } y_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda} l$$

$$\text{从而 } Ay_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda} A l$$

$$\text{即有 } A l = \lambda l \Rightarrow l \in N$$

从而 $[l] = [0]$, 但 $\|Ty_{n_k}\| = 1$, 矛盾!定理: 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in C(X)$, 则 $R(\lambda I - A) = X \Leftrightarrow N(\lambda I - A) = \{0\}$.Proof: $\Rightarrow$ 设 $R(\lambda I - A) = X$, 反设 $N(\lambda I - A) \neq \{0\}$, 取

$$x_1 \in N(\lambda I - A) \setminus \{0\}, \text{ 则 } x_1 \in X = R(\lambda I - A), \text{ 故}$$

$$\exists x_2 \in X \text{ 使得 } x_1 = (\lambda I - A)x_2, \text{ 则}$$

$$(\lambda I - A)^2 x_2 = (\lambda I - A)x_1 = 0, (\lambda I - A)x_2 = x_1 \neq 0$$

$$\text{即 } x_2 \in N(\lambda I - A)^2 \text{ 但 } x_2 \notin N(\lambda I - A).$$

Summary

CUE

而 $\forall x \in N(\lambda I - A)$, 则 $(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)^k x = 0$

$$\Rightarrow x \in N(\lambda I - A)^k \Rightarrow N(\lambda I - A) \subsetneq N(\lambda I - A)^k$$

若 $\forall k \geq 1$ 已经选出了 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, 使得

$$x_j \in N(\lambda I - A)^{j+1} \setminus N(\lambda I - A)^j$$

则对 j, k , 由 $x_{k+1} \in X = R(\lambda I - A)$ 知, $\exists x_k$ 使得

$$x_{k+1} = (\lambda I - A)x_k \Rightarrow (\lambda I - A)^k x_k = (\lambda I - A)^{k+1} x_k \neq 0$$

$$(\lambda I - A)^{k+1} x_k = (\lambda I - A)^k x_{k+1} = 0, \text{ 从而 } x_k \in N(\lambda I - A)^{k+1} \setminus N(\lambda I - A)^k$$

故若记 $E_n = N(\lambda I - A)^n$, 则

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots \subsetneq E_n \subsetneq \dots$$

$$\text{并且由 } (\lambda I - A)^k = \lambda^k I + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} (-A)^j$$

$$\text{及 } \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} (-A)^j \in C(X) \text{ 知 } E_n \text{ 为闭集, } (\forall n)$$

故由 Riesz 定理知 $\forall n \geq 1$, $\exists x_n$ 使得

$$x_n \in E_n, \text{ dist}(x_n, E_{n-1}) > \frac{1}{n}, \|x_n\| = 1$$

从而由 $A \in C(X)$, $\{x_n\} \subset B_X$ 知 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列.但 $\forall n > n$

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|(\lambda x_n - Ax_n) - (\lambda x_m - Ax_m) + \lambda(x_n - x_m)\|$$

$$\geq |\lambda| \text{dist}(x_m, E_{m-1}) > \frac{1}{n} |\lambda|$$

$$\text{其中 } (\lambda I - A)x_m \in E_{m-1}, (\lambda I - A)x_n \in E_{m-1} \subset E_{m-1}$$

$$x_n \in E_n \subset E_{m-1}.$$

 $\Leftarrow$ 设 $N(\lambda I - A) = \{0\}$, $R(\lambda I - A) = X$

Summary

CUE

则有在 $X_1 \in X \setminus R(\lambda I - A)$, 由 $N(\lambda I - A) = \{0\}$ 知
 $(\lambda I - A)x_1 = x_2 \neq 0$ 故 $x_2 \in R(\lambda I - A)$, $x_2 \notin R(\lambda I - A)$
 数学归纳法易得

$$E_1 \neq E_2 \neq \dots \neq E_n \neq \dots$$

其中 $E_n = R(\lambda I - A)^n$, 又 $(\lambda I - A)^n = \lambda^n I + B$, 其中 $B \in C_0$
 故 $E_n = R(\lambda I - A)^n$ 为闭集, 由 Riesz 定理知:

$\forall n \geq 1, \exists x_n$ 使得

$$\|x_n\| = 1, \text{dist}(x_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}, x_n \in E_n.$$

由 $A \in C(X)$ 及 $\{x_n\} \subset B_X$ 知 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列
~~但是~~ $\forall m > n$ 有

$$\|Ax_m - Ax_n\| = \|(\lambda x_m - Ax_m) - (\lambda x_n - Ax_n) + \lambda(x_m - x_n)\| \\ > |\lambda| \text{dist}(x_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}|\lambda|$$

其中 $(\lambda I - A)x_n \in E_{n+1}$, $(\lambda I - A)x_m \in E_{m+1} \subset E_{n+1}$

$$\lambda x_m \in E_m \subset E_{n+1}$$

故矛盾!

推论: 设 $\lambda \neq 0, A \in C(X)$, 则 $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$

Proof: " $\Leftarrow$ " 是显然的

" $\Rightarrow$ " 设 $\lambda \in \sigma(A)$, 则 $\lambda I - A$ 不是满射, 即

$R(\lambda I - A) \neq X$, 从而 $N(\lambda I - A) \neq \{0\}$ 故

~~$\lambda \in \sigma_p(A)$~~ λ 为特征点.

Summary

CUE

定理: 设 $A \in C(X)$, 则 $\sigma(A)$ 无非零聚点.

Proof: 设 λ_0 为 $\sigma(A)$ 的一个聚点, 则存在互异的点列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

使得 $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, 由 $\lambda_n \in \sigma(A)$ 知 $\lambda_n \in \sigma_p(A)$. 设

$x_n \in N(\lambda_n I - A) (\forall n \geq 1)$, 断言: $\{x_n\}$ 线性无关. 设对于 $\{x_n\}_{n=1}^k$ 成立, 则对于 $k+1$: 反设 $\{x_n\}_{n=1}^{k+1}$ 线性相关, 则 $\exists \beta_i$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = 0$$

$$\text{则一方面 } \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \lambda_{k+1} x_i = 0$$

$$\text{另一方面 } A(\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \lambda_i x_i = 0$$

$$\text{从而有 } \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0$$

而 $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \neq 0$, 由 $\{x_i\}_{i=1}^k$ 线性无关知 $\beta_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k$

进而 $\beta_{k+1} x_{k+1} = 0 \Rightarrow \beta_{k+1} = 0$. 故 $\{x_i\}$ 线性无关.

$\forall n \geq 1$, 记 $E_n = \text{span}\{x_i\}_{i=1}^n$, 则由 $\{x_i\}$ 线性无关知

$$E_1 \neq E_2 \neq \dots \neq E_n \neq \dots$$

并且 $\{E_n\}$ 均有限维, 从而为 X 的闭子空间. 由 Riesz 定理知 $\forall n \geq 1, \exists y_n$ 使得

$$y_n \in E_n, \|y_n\| = 1, \text{dist}(y_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}.$$

从而由 $A \in C(X)$ 及 $\{y_n\} \subset B_X$ 知 $\{Ay_n\}$ 有收敛子列

而 $(\lambda_n I - A)y_n \in E_{n+1}$ 故 $\forall m > n$,

$$\|\frac{\lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{\lambda_m x_m}{\lambda_m}\| = \|\frac{\lambda_n (\lambda_m I - A)x_m}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n (\lambda_n I - A)x_n}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{\lambda_m x_m}{\lambda_m}\| \\ \geq \text{dist}(x_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Summary

CUE

故若 $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$ 则由 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛

$\{\frac{Tx_{n_k}}{\lambda x_{n_k}}\}$ 收敛, 从而 Cauchy, 这有(*)矛盾!

定理: 设 $\lambda \neq 0$, $A \in C(X)$, 则 $\exists n_0 \geq 1$ 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+j} \quad \forall j \geq 1$$

Proof: 反设 $\forall n \geq 1$, $E_n \neq E_{n+1}$

其中 $E_n = N(\lambda I - A)^n$.

则由 $A \in C(X)$ 知 E_n 为闭集, 由 Baire 定理, $\forall n \geq 1$

$\exists x_n$ 满足 $x_n \in E_n$, $\text{dist}(x_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$, $\|x_n\| = 1$

从而由 $A \in C(X)$ 及 $\{x_n\} \subset B_X$ 知 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_m\| = \|(\lambda I - A) x_m - (\lambda I - A) x_n + \lambda (x_n - x_m)\| > \text{dist}(x_m, E_{m-1}) \cdot |\lambda| > \frac{1}{2} |\lambda|$$

矛盾! 从而 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+1}$$

从而 $\forall x \in N(\lambda I - A)^{n_0+2}$

$$(\lambda I - A)^{n_0+2} x = (\lambda I - A)^{n_0+1} (\lambda I - A) x = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A) x \in N(\lambda I - A)^{n_0+1} = N(\lambda I - A)^{n_0}$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)^{n_0+1} x = 0 \Rightarrow x \in N(\lambda I - A)^{n_0+1} = N(\lambda I - A)^{n_0}$$

由数学归纳法易知命题成立.

定理: 设 $\lambda \neq 0$, $A \in C(X)$, 若 $\exists n_0 \geq 1$ 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+j} \quad \forall j \geq 1$$

Summary

CUE

$$N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0} = \{0\}.$$

Proof: $\forall x \in N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0}$, 则 $\exists y \in X$

$$(\lambda I - A)^{n_0} x = 0, \quad x = (\lambda I - A)^{n_0} y$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)^{2n_0} y = 0 \Rightarrow y \in N(\lambda I - A)^{2n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0}$$

$$\Rightarrow x = (\lambda I - A)^{n_0} y = 0$$

$$\text{从而 } N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0} = \{0\}.$$

定理: 设 $\lambda \neq 0$, $A \in C(X)$, 若 $\exists n_0 \geq 1$ 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+j} \quad \forall j \geq 1$$

$$\text{则 } X = N(\lambda I - A)^{n_0} \oplus R(\lambda I - A)^{n_0}.$$

Proof: $\dim N(\lambda I - A)^{n_0} < +\infty$, 故记 $\{e_i\}_{i=1}^{n_0}$ 为 $N(\lambda I - A)^{n_0}$ 的一

组基, $\{f_i\}_{i=1}^{n_0} \subset X^*$ 满足

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}$$

$$\text{从而 } \forall x \in N(\lambda I - A)^{n_0}, x = \sum_{i=1}^{n_0} f_i(x) e_i$$

考虑算子: $T: X \rightarrow X$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n_0} f_i(x) e_i + (\lambda I - A)^{n_0} x$$

则 $T \in C(X)$, 故 $R(T) = X \Leftrightarrow N(T) = \{0\}$. 由题设条件

知 $N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0} = \{0\}$, 故 $\forall x \in N(T)$

$$\sum_{i=1}^{n_0} f_i(x) e_i + (\lambda I - A)^{n_0} x = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_0} f_i(x) e_i = -(\lambda I - A)^{n_0} x \in N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0}$$

$$\text{从而 } \sum_{i=1}^{n_0} f_i(x) e_i = -(\lambda I - A)^{n_0} x = 0 \Rightarrow x \in N(\lambda I - A)^{n_0}.$$

Summary

CUE

故 $x = \sum f_i(x) e_i = 0$ 从而 $N(T) = 0$ $\square$.定理: 设 $A \in C(X)$, $\lambda \neq 0$, 则 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_0$ 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} \oplus R(\lambda I - A)^{n_0} = X.$$

定理设 $A \in C(X)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$ 存在至多有限个 $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \sigma(A)$ 及 $\{n_i\}_{i=1}^k$ 使得

$$\textcircled{1} |\lambda_i| \geq \varepsilon \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\textcircled{2} X = \left(\bigoplus_{i=1}^k N(\lambda_i I - A)^{n_i} \right) \oplus \left(\bigcap_{i=1}^k R(\lambda_i I - A)^{n_i} \right)$$

$$\textcircled{3} \text{ 令 } M = \bigcap_{i=1}^k R(\lambda_i I - A)^{n_i}, \text{ 则 } \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ 满足 } |\lambda| \geq \varepsilon$$

有: M 为 $\lambda I - A$ 的不变子空间且 λ 为 $A|_M$ 的正则点.Proof ① 由于 $\sigma(A)$ 只以 0 为聚点, 从而

$$\#\{\lambda \mid |\lambda| \geq \varepsilon \cap \sigma(A)\} < \infty$$

② 由于 $\forall 1 \leq i \leq k, \exists n_i \in \mathbb{Z}_0$ 使得

$$X = N(\lambda_i I - A)^{n_i} \oplus R(\lambda_i I - A)^{n_i}$$

若记 $N_i = N(\lambda_i I - A)^{n_i}, R_i = R(\lambda_i I - A)^{n_i}$ 则 $X = N_i \oplus R_i$, 若式

$$N_i(\lambda I - A)^{n_i} \cap N_j(\lambda I - A)^{n_j} = \{0\} \quad \forall i \neq j$$

成立, 则 $N_i \subset R_j$, 从而

$$\begin{aligned} X &= N_i \oplus R_i = N_i \oplus R(\lambda_i I - A)^{n_i} \oplus R(\lambda_i I - A)^{n_i} \\ &= N_i \oplus N_i \oplus (R_i \cap R_j) \end{aligned}$$

CUE

由数学归纳法, 设 $m-1 < k$ 成立, 则对 m 有

$$X = \left(\bigoplus_{i=1}^{m-1} N_i \right) \oplus \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} R_i \right)$$

$$\text{但 } R_j = R(\lambda_j I - A)^{n_j} \oplus R(\lambda_j I - A)^{n_j} \oplus R(\lambda_j I - A)^{n_j}$$

$$= N_m \oplus (R_j \cap R_m).$$

$$\text{从而 } X = \left(\bigoplus_{i=1}^m N_i \right) \oplus \left(\bigcap_{i=1}^m R_i \right).$$

下证③式成立, 事实上, 由 $(\lambda I - A)^{n_i}(\lambda_j I - A)^{n_j} = 0$ 知

$$\ker(\lambda I - A)^{n_i} \oplus \ker(\lambda_j I - A)^{n_j} = \ker(I) = \{0\}$$

$$\textcircled{3} \forall 1 \leq i \leq k, \text{ 由于 } \lambda I - A = (\lambda I - A) + (\lambda - \lambda_i)I$$

$$\text{而 } (\lambda - \lambda_i)I(R(\lambda_i I - A)^{n_i}) = R(\lambda_i I - A)^{n_i}$$

$$(\lambda_i I - A)(R(\lambda_i I - A)^{n_i}) = R(\lambda_i I - A)^{n_i}$$

$$\subseteq R(\lambda_i I - A)^{n_i}$$

$$\text{从而 } (\lambda I - A)(R(\lambda_i I - A)^{n_i}) \subset R(\lambda_i I - A)^{n_i}$$

$$\text{故 } (\lambda I - A)(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^k R(\lambda_i I - A)^{n_i} = M.$$

由 $R(\lambda_i I - A)^{n_i}$ 均为闭子空间知 M 为 X 的闭子空间且 M 为 $\lambda I - A$ 不变子空间, 由 $A \in C(X)$ 知 $A|_M \in C(M)$

$$\text{故 } \lambda \in \rho(A|_M) \Leftrightarrow N(\lambda I - A|_M) = \{0\}$$

若 $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i=1}^k$, 则 $\lambda \in \rho(A)$ 知

$$N(\lambda I - A) = \{0\}$$

$$\text{故 } N((\lambda I - A)|_M) = N(\lambda I - A) \cap M = \{0\}.$$

从而 $\lambda \in \rho(A|_M)$

Summary

Summary

CUE

若 $\lambda = \lambda_i$ ($1 \leq i \leq k$), 下证 $\lambda_i I - A: R(\lambda_i I - A)^{n_i} \rightarrow R(\lambda_i I - A)^{n_i}$

为单射. 令 $(\lambda_i I - A)x = 0$ ($x \in R(\lambda_i I - A)^{n_i}$)

则 $\exists y \in X$ 使得 $x = (\lambda_i I - A)^{n_i} y$, 从而

$$(\lambda_i I - A)^{n_i} y = 0$$

$\Rightarrow y \in N(\lambda_i I - A)^{n_i} = N(\lambda_i I - A)^{n_i}$, 故

$$x = (\lambda_i I - A)^{n_i} y = 0.$$

故 $\lambda_i I - A$ 为 $R(\lambda_i I - A)^{n_i}$ 到自身的单射, 故

$$N(\lambda_i I - A)/M \subset N((\lambda_i I - A)|_{R_i}) = \{0\}$$

即 $\lambda_i \in \rho(A|M)$. 综上 $\lambda \in \rho(A|M) \forall |\lambda| \geq \varepsilon$.

引理: 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A \in C(X)$, 则 $\dim N(\lambda I - A) = \text{codim } R(\lambda I - A)$

其中 $\text{codim } R(\lambda I - A)$ 为 $R(\lambda I - A)$ 在 X 中的余维数.

(若 $X = \text{span}\{e_j\}_{j=1}^n \oplus R(\lambda I - A)$ 且 $\{e_j\}$ 线性无关, 则

$$\text{codim } R(\lambda I - A) = n).$$

Proof: 若 $\lambda \in \rho(A)$, 则 $R(\lambda I - A) = X$, $N(\lambda I - A) = \{0\}$, 显然

成立, 下设 $\lambda \in \sigma(A)$, 则 $\exists n_0 \geq 1$ 使得

$$X = N(\lambda I - A)^{n_0} \oplus R(\lambda I - A)^{n_0} =: N \oplus R$$

断言有: $\dim N(\lambda I - A) = \dim N((\lambda I - A)|_N)$

$$\text{codim } R(\lambda I - A) = \text{codim } R((\lambda I - A)|_N)$$

那么由有限维线性空间中其显然成立.

事实上: $N(\lambda I - A) = N((\lambda I - A)|_N) \oplus N((\lambda I - A)|_R)$

Summary

CUE

$\forall x \in N((\lambda I - A)|_R)$, 则 $\exists y \in X$

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad x = (\lambda I - A)^{n_0} y$$

从而 $(\lambda I - A)^{n_0+1} y = 0 \Rightarrow y \in N((\lambda I - A)^{n_0+1}) = N((\lambda I - A)^{n_0})$

故 $x = (\lambda I - A)^{n_0} y = 0 \Rightarrow N((\lambda I - A)|_R) = \{0\}$

从而 $N(\lambda I - A) = N((\lambda I - A)|_N)$

$$\Rightarrow \dim N(\lambda I - A) = \dim N((\lambda I - A)|_N).$$

又 $\lambda I - A: R(\lambda I - A)^{n_0} \rightarrow R(\lambda I - A)^{n_0}$

为双射, 故 $R((\lambda I - A)|_R) = R(\lambda I - A)^{n_0}$.

若 $X = \text{span}\{e_j\} \oplus R(\lambda I - A)$

$$= \text{span}\{e_j\} \oplus R(\lambda I - A)^{n_0} \oplus R((\lambda I - A)|_N)$$

则由 $X = N \oplus R$ 知 $\text{span}\{e_j\} \oplus R((\lambda I - A)|_N) = N$

从而 $\text{codim } R(\lambda I - A) = \text{codim } R((\lambda I - A)|_N)$ $\square$

引理: 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A \in C(X)$, A' 为 A 的 Banach 共轭算子, 则

$$\dim N(\lambda I - A) = \dim (\lambda I - A')$$

Proof: 只需证明 $\dim N(\lambda I - A') = \text{codim } R(\lambda I - A)$

由 $A \in C(X)$ 知 $A' \in C(X^*) \Rightarrow \dim N(\lambda I - A') < +\infty$

设 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 为 $N(\lambda I - A')$ 的基, 由 $N(\lambda I - A')^\perp = \overline{R(\lambda I - A)}$

知 $\forall x \in R(\lambda I - A) = \overline{R(\lambda I - A)}$,

$$\Leftrightarrow x \in N(\lambda I - A')^\perp \Leftrightarrow \langle f_i, x \rangle = 0 \quad \forall f_i \in N(\lambda I - A')$$

$$\Leftrightarrow \langle f_i, x \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$$

Summary

CUE

由 Hahn-Banach 定理, $\exists f_i \in X^*$ 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad X = \overline{\text{span}\{e_i\}^n} \oplus \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$$

$$\text{从而 } \text{codim } R(\lambda I - A) = n = \dim N(\lambda I - A')$$

推论: 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(A)$, $A \in C(X)$, 则

$$\dim N(\lambda I - A) = \text{codim } R(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I - A')$$

$$= \text{codim } R(\lambda I - A')$$

定理: 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(A)$, $A \in C(X)$, A' 为 A 的 Banach 共轭算子

则有

$$\textcircled{1} \quad N(\lambda I - A^*) = R(\lambda I - A)^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad R(\lambda I - A) = N(\lambda I - A')^\perp$$

$$\textcircled{3} \quad N(\lambda I - A) = R(\lambda I - A')^\perp$$

$$\textcircled{4} \quad R(\lambda I - A') = N(\lambda I - A)^\perp.$$

Proof: 只需证明 $N(\lambda I - A)^\perp \subset R(\lambda I - A')$ 反设 $R(\lambda I - A') \neq N(\lambda I - A)^\perp$.则 $\exists f_0 \in N(\lambda I - A)^\perp \setminus R(\lambda I - A')$ 即有

$$\langle f_0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in N(\lambda I - A)$$

由 $A \in C(X)$, $\lambda \neq 0$ 知 $\dim N(\lambda I - A) = n < +\infty$, 设 $\{e_i\}$ 为 $N(\lambda I - A)$ 的一组基, 则 $\exists \{f_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij},$$

 $\textcircled{1} \{f_i\}_{i=1}^n$ 线性无关.

Summary

CUE

设 $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$, 则

$$0 = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, e_i \rangle = \alpha_i \quad |e_i| \leq n.$$

从而 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ 而 $f_0 \notin R(\lambda I - A')$, $0 \in R(\lambda I - A')$ 知 $f_0 \neq 0$, 从而 $\alpha_0 \neq 0$, 故 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 线性无关. $\textcircled{2} \text{span}\{f_i\}_{i=1}^n \cap R(\lambda I - A') = \{0\}$ $\forall f \in \text{span}\{f_i\}_{i=1}^n \cap R(\lambda I - A')$, 则 $\exists k_j$

$$f = \sum_{j=1}^n k_j f_j \in R(\lambda I - A') \neq N(\lambda I - A)$$

故 $\forall y \in N(\lambda I - A)$ 有

$$\langle f, y \rangle = 0$$

特别地, 取 $y = e_j$ ($1 \leq j \leq n$), 则有 $k_j = 0$ ($1 \leq j \leq n$), 从而 $f = \alpha_0 f_0$, 而由 $f \in R(\lambda I - A')$ 知 $\alpha_0 = 0$, 若不然 $f_0 \in R(\lambda I - A')$ 矛盾. 从而

$$\text{codim } R(\lambda I - A') \geq n+1 > n = \dim N(\lambda I - A)$$

但 $\text{codim } R(\lambda I - A') = \dim N(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I - A)$ 矛盾!

Summary

CUE

CUE

内积空间.

定义: 设 H 为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 若 $\forall x, y \in H$, 都存在一个数 $(x, y) \in \mathbb{C}$ 满足

$$①. (x, x) \geq 0 \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$②. (x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in H.$$

$$③. (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y, z \in H.$$

Remark: $\forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z).$$

例: H 为 n 维线性空间 $\{e_i\}$ 为一组基, $\forall x, y \in H$.

$$x = \sum x_i e_i, \quad y = \sum y_i e_i, \quad \text{则}$$

$$(x, y) = \sum x_i \overline{y_i} \Delta_i \quad (\Delta_i > 0)$$

为 H 上的一个内积例: 设 (Ω, μ) 为测度空间, $f(x) \geq 0$ on Ω , 则

$$\forall f, g \in L^2(\Omega, \mu).$$

$$(f, g) = \int_{\Omega} f g \overline{g} \, d\mu$$

为 L^2 上的一个内积定理 (Cauchy-Schwarz) 设 H 为内积空间, 则 $\forall x, y \in H$

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

等号成立当且仅当线性相关

证. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H$, 有

Summary

Summary

CUE

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}(x, y)) + |\lambda|^2 (y, y)$$

取 $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ 即得.

定理: $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ 为内积空间 $\forall x \in \mathcal{H}$ 定义

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\cdot\|$ 为 $\mathcal{H}$ 上的范数.

定理(内积连续性) $\mathcal{H}$ 为内积空间, 则

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$$

定义: 完备内积空间称为 Hilbert 空间.

定理: 内积空间的完备化空间为 Hilbert 空间.

Proof 设 $\mathcal{H}$ 为内积空间, 则其也为赋范线性空间, 从而

存在完备化空间 $\tilde{\mathcal{H}}$, $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists \{x_n\} \subset \tilde{\mathcal{H}},$

$\{y_n\} \subset \tilde{\mathcal{H}}$ 为 Cauchy 列使得

$$x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}}$$

$$\text{定义 } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$$

① 定义合理性: $\forall n, m \geq 1$ 有

$$|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| \leq |(x_n, y_n - y_m)| + |(x_n - x_m, y_m)|$$

$$\leq \|y_n - y_m\| \cdot \|x_n\| + \|x_n - x_m\| \cdot \|y_m\|$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{as } n, m \rightarrow \infty$$

从而 $\{(x_n, y_n)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy, 从而存在.

若 $\{\bar{x}_n\} = \{\overline{x_n}\}, \{\bar{y}_n\} = \{\overline{y_n}\}$

Summary

CUE

$$\text{则 } |(x_n, y_n) - (x_n', y_n')|$$

$$\leq \|x_n - x_n'\| \|y_n\| + \|x_n'\| \|y_n - y_n'\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

从而 $(\cdot, \cdot)$ 与 $\{\bar{x}_n\}$ 的选取无关.

② $(\cdot, \cdot)$ 为内积.

线性性由内积的双线性性及极限的线性性保证.

只需验证 $(x, x) \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$\forall x = \overline{\{x_n\}}, (x, x) = 0$, 故

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2$$

从而 $x_n \rightarrow 0$ 即 $x = 0$.

③ $(\cdot, \cdot)$ 限制到 $\mathcal{H}$ 上与原始所定义的相同.

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x_n) = (x, x)$$

定理(极化恒等式) 设 $\mathcal{H}$ 为实上的内积空间, 则

$$\text{① 当 } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ 时 } (x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\text{② 当 } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ 时 } (x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

定理: 赋范线性空间可引入内积当且仅当

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Proof " $\Leftarrow$ " $\forall x, y \in \mathcal{H}$ 有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2$$

$$+ \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Summary

CUE

⇒ 不妨设 $K = \mathbb{R}$, 定义

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$\text{则 } (x, y) = (y, x) \text{ 显然, } (x, x) = \frac{1}{4}\|x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\text{故 } (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{H},$$

$$4((x, z) + (y, z)) = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2$$

$$= 2(\|x+y+z\|^2 - \|x-y\|^2) - 2(\|x+y-z\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$$

$$= 8(x, z)$$

$$\Rightarrow (x, z) + (y, z) = 2(x, z)$$

令 $y=0$ 得

$$(x, z) = 2(x, z) \quad (*)$$

令 $x=x+y$ 有

$$(x+y, z) = 2(x+y, z) = (x, z) + (y, z).$$

对任意给定的 x, y , 令

$$f(t) = (tx, y)$$

则 $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta)$, 由 f 连续知

$$\text{故 } f(1) = \alpha f(1)$$

$$\text{从而 } (x, y) = \alpha(x, y)$$

CUE

正规正交集与正规正交基

定义: 设 $\mathcal{H}$ 为内积空间

① 若 $(x, y) = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$

② $x \in \mathcal{H}, M \subset \mathcal{H}$, 若

$$(x, y) = 0 \quad \forall y \in M,$$

则称 x 与 M 正交, 记作 $x \perp M$.

③ 设 $M, N \subset \mathcal{H}$, 若

$$(x, y) = 0 \quad \forall x \in M, y \in N,$$

则称 M 与 N 正交, 记作 $M \perp N$.

④ $M \subset \mathcal{H}$, M 的正交补定义为

$$M^\perp = \{x: (x, y) = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Remark.

$$①. x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$$

$$②. x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$③. x \perp \mathcal{H} \Leftrightarrow x = 0$$

$$④. x \perp y_1, x \perp y_2 \Rightarrow x \perp (\alpha y_1 + \beta y_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$⑤. x \perp y_n (\forall n), y_n \rightarrow y \Rightarrow x \perp y$$

$$⑥. x \in \mathcal{H}, M \subset \mathcal{H}, x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{\text{span } M}$$

$$⑦. M, N \subset \mathcal{H}, M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$$

$$⑧. M \subset \mathcal{H} \quad M \cap M^\perp = \begin{cases} 0 & 0 \in M \\ \emptyset & 0 \notin M \end{cases}$$

Summary

Summary

CUE

定理: $\mathcal{H}$ 为内积空间, $M \subset \mathcal{H}$, 则 $M^\perp$ 为 M 的闭线性子空间且有 $M^\perp = (\text{span } M)^\perp = (\overline{\text{span } M})^\perp$.Proof: 由 $M \subset \text{span } M \subset \overline{\text{span } M}$ 知

$$M^\perp \supset (\text{span } M)^\perp \supset (\overline{\text{span } M})^\perp$$

 $\forall x \in M^\perp$ 则

$$(x, y) = 0 \quad \forall y \in M.$$

从而 $\forall y, z \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(x, \alpha y + \beta z) = 0$$

$$\Rightarrow x \perp \text{span } M. \quad \forall y \in \overline{\text{span } M}, \exists y_n \in \text{span } M$$

使得 $y_n \rightarrow y$ 但

$$(x, y_n) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$$

$$\Rightarrow M^\perp = (\overline{\text{span } M})^\perp$$

 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in M^\perp$

$$(x, z) = (y, z) = 0 \quad \forall z \in M$$

$$\Rightarrow (x + \beta y, z) = 0 \quad \forall z \in M.$$

令 $x_n \in M^\perp, x_n \rightarrow x$, 则

$$(x, z) = \lim (x_n, z) = 0 \quad \forall z \in M.$$

定义: 称内积空间中一族元素 $\{e_i\}_{i \in I}$ 为正规正交集

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

称 $\{e_i\}$ 为正规正交集, 若 $(e_i, e_i) = \delta_{ij}$. 若

Summary

CUE

$$(e_i, x) = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0$$

则称 $\{e_i\}$ 为完备的.

定理: 任何非零内积空间必存在完备正交集.

引理: 设 $\{e_i\}_1^n$ 为内积空间中一个正规正交集, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\|\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i\|^2$$

Proof: 只需过求

$$\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \perp (x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i)$$

事实上,

$$(\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x, e_i)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x, e_i) (x, e_j) (e_i, e_j)$$

$$= 0$$

由勾股定理立得.

推论 (Bessel inequality) 设 $\{e_i\}_1^\infty$ 为 $\mathcal{H}$ (内积空间) 的正规正交集, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$ 有 $\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n$ 定理: 设 $\{e_i\}_{i \in I}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正规正交集, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$ $\{(x, e_i) : i \in I\}$ 中有至多可数个不为 0, 且

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Proof: 记 $F_n = \{e_i : |(x, e_i)| \geq \frac{1}{n}\}$, 则

$$\{(x, e_i) : (x, e_i) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$$

则 F_n 均为有限集. 若不然 $\exists N \geq 1, \#F_N = \infty$, 则

Summary

CUE

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \geq \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \rightarrow \infty$$

与 $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$ 矛盾, 故 $\{(x, e_i) : (x, e_i) \neq 0\}$ 有至多

可数个元素, 从而可将其排列为

$$(x, e_1) \neq 0, (x, e_2) \neq 0, \dots, (x, e_n) \neq 0, \dots$$

$$\text{故 } \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

定理: 设 $\{e_i\}_{i \in I}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中一个正规正交集, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$

有 $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ 且

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 + \|x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i\|^2 = \|x\|^2$$

Proof. 由于 $\{(x, e_i) : (x, e_i) \neq 0, i \in I\} \leq \aleph_1$, 从而可将 $\{e_i\}_{i \in I}$ 排

列为 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$(x, e_n) \geq (x, e_{n+1}) \quad \forall n \geq 1$$

由 $\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ 知 $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$ 绝对收敛, 从而由

完备知其收敛而由于 $\forall n$ 有

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 + \|x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i\|^2 = \|x\|^2$$

两侧令 $n \rightarrow \infty$ 即得

定义: 内积空间 $\mathcal{H}$ 的一个正规正交集为基, 若

$$x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

定理: 设 $S = \{e_i\}_{i \in I}$ 为 Hilbert 空间中的一个正规正交集, 则

下述结论等价:

Summary

CUE

① S 为 $\mathcal{H}$ 的一组基.

② S 完备

③ Parseval 恒等式成立: $\forall x \in \mathcal{H}$ 有 $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$

Proof: ① $\Rightarrow$ ②. $\forall x \in \mathcal{H}$ 有 $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$, 则若令

$$(x, e_j) = 0 \quad \forall j \in I$$

有 $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i = 0$

即 $[(x, e_j) = 0 \quad \forall j \Rightarrow x = 0] \Rightarrow S$ 完备.

② $\Rightarrow$ ③. 由引理知: $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i\|^2 + \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2$$

$$\text{而 } \forall e_j \quad (x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i, e_j) = 0$$

故由 S 完备知 $x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i = 0$, 从而 Parseval 成立.

③ $\Rightarrow$ ①. 由 $\|x\|^2 = \|x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i\|^2 + \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2$

立即得到.

定理: 任何非零 Hilbert 空间必有一组正规正交集 S , 进一步

若 $\mathcal{H}$ 可分, 则 S 可数.

Proof. 设 $S = \{e_i\}_{i \in I}$ 不可数, 则

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \forall i \neq j$$

由下述引理立得:

Lemma. 设 X 为度量空间, 若 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $B \subset X$ 不可数满足

$$\forall x, y \in B, x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \varepsilon_0$$

Summary

CUE

则 X 不可分.定理(正交投影定理) 设 M 为 Hilbert 空间的闭子空间, 则

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp.$$

Proof 由 M 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间和 M 也为 Hilbert 空间, 故有正规正交基 $\{e_i; i \in \mathbb{I}\}$, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum (x, e_i) e_i + x - \sum (x, e_i) e_i$$

$$\in M + M^\perp$$

而 $M \cap M^\perp = \{0\}$ 显然, 故 $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

Summary

CUE

Riesz 表示定理与 Lax-Milgram 定理.

定理(Riesz 表示定理) 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, 则 $\forall f \in \mathcal{H}^*$, 存在唯一的 $y \in \mathcal{H}$ 使得

$$f(x) = (x, y) \quad \|y\| = \|f\|.$$

Proof: 若 $f=0$, 则取 $y=0$, 下设 $f \neq 0$, 则 $\ker f \neq \mathcal{H}$, 而由 $f \in \mathcal{H}^*$ 知 $\ker f$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间, 故由正交投影定理知

$$\mathcal{H} = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$$

取 $u \in \mathcal{H} \setminus \ker f$, 且 $f(u) \neq 0$, 故 $\forall x \in \mathcal{H}$ 有

$$x - \frac{f(x)}{f(u)} u \in \ker f$$

而由 $u \in \mathcal{H} \setminus \ker f \subset (\ker f)^\perp$ 知

$$(x - \frac{f(x)}{f(u)} u, u) = 0$$

即有 $f(x) = \frac{f(u)}{(u, u)} \cdot (x, u) \quad \forall x \in \mathcal{H}$ 取 $y = \overline{f(u)} u / (u, u)$, 则

$$f(x) = (x, y) \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

下证 $\|f\| = \|y\|$, 一方面

$$|f(u)| = |(u, y)| \leq \|u\| \cdot \|y\| \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

从而 $\|f\| \leq \|y\|$, 另一方面, 由 y 的构造立即得到

$$\|y\| = |f(u)| / \|u\| \leq \|f\|.$$

综上有: $\|f\| = \|y\|$. 唯一性易证.定理(Lax-Milgram 定理) 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $\varphi: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ 的

Summary

CUE

有界共轭双线性泛函, 即

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in \mathcal{H}$ 有

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z)$$

$$\varphi(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} \varphi(z, x) + \bar{\beta} \varphi(z, y)$$

② $\exists M \geq 0$ 使得 $\forall x, y \in \mathcal{H}$ 有

$$|\varphi(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\|$$

若 φ 在 $\mathcal{H}$ 上是强制的, 即 $\exists N > 0$ 使得

$$|\varphi(x, x)| \geq N \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

则 $\forall f \in \mathcal{H}^*, \exists y \in \mathcal{H}$ 使得

$$f(x) = \varphi(x, y) \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Proof: 一方面, 由 Riesz 表示定理, $\forall f \in \mathcal{H}^*, \exists! u \in \mathcal{H}$ 使

$$f(x) = (x, u) \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

另一方面, 对于任意给定的 $y \in \mathcal{H}$, 定义 $g_y(x) = \varphi(x, y)$ 则由 $|g_y(x)| \leq M \|y\| \cdot \|x\|$ 知 $g_y \in \mathcal{H}^*$, 故存在唯一的 $v \in \mathcal{H}$ 使得

$$\varphi(x, y) = g_y(x) = (x, v)$$

记这个 v 为 Ay , 我们证明由 $A: y \rightarrow v$ 所定义的映射为有界线性算子. 事实上 $\forall x, y, z \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 有 $\varphi(x, \alpha y + \beta z) = (x, A(\alpha y + \beta z))$

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} \varphi(x, y) + \bar{\beta} \varphi(x, z) = \bar{\alpha} (x, Ay) + \bar{\beta} (x, Az)$$

Summary

CUE

从而 $A(\alpha y + \beta z) = \alpha Ay + \beta Az$ 且由 φ 的有界性知 $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = \varphi(Ax, x)$$

$$\leq M \|Ax\| \cdot \|x\|$$

故有 $\|Ax\| \leq M \|x\|$ 即 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.从而 $\forall f \in \mathcal{H}^*, \exists! y \in \mathcal{H} f(x) = \varphi(x, y) (\forall x)$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{H}^*, \exists! y \in \mathcal{H} (x, u) = (x, Ay) (\forall x)$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{H}, \exists! y \in \mathcal{H}, u = Ay$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 为 } \mathcal{H} \text{ 上的双射.}$$

又需证明 A 为双射即可. 由 φ 在 $\mathcal{H}$ 上强制得

$$|\varphi(x, x)| \geq N \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow N \|x\|^2 \leq |(x, Ax)| \leq \|x\| \cdot \|Ax\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow N \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

故 A 为单射. 又设 $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ 满足

$$Ax_n \rightarrow y$$

则 $\{Ax_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ Cauchy, 从而 $\exists x \in \mathcal{H}$

$$x_n \rightarrow x$$

而 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, 故 $Ax_n \rightarrow Ax$ 从而 $Ax = y$, 故 $R(A)$ 为 $\mathcal{H}$ 中的闭集. 故由正交投影定理知

$$\mathcal{H} = R(A) \oplus R(A)^\perp$$

Summary

CUE

则 $\forall x \in R(A)^\perp$ 有

$$(x, Ay) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}$$

特别地取 $y = x$, 则

$$0 = \varphi(x, x) = (x, Ax) \geq \|x\|^2$$

 $\Rightarrow$ 故有 $R(A)^\perp = \{0\}$ 故 $R(A) = \mathcal{H}$. 至此命题得证.

Summary

CUE

Hilbert 共轭算子.

定义: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, 则存在唯一的 $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, 使得

$$(Ax, y) = (x, By) \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$$

则称 B 为 A 的 Hilbert 共轭算子. 记为 A^* 定理: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ 为 $\mathbb{C}$ 上 Hilbert 空间, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, 则:

$$①. (A^*)^* = A$$

$$②. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$$

$$③. \|A^*\|^2 = \|A\|^2 = \|AA^*\|^2 = \|A^*A\|^2$$

$$④. (CB)^* = B^*C^*$$

⑤ 若 A 有界可逆, 则 A^* 有界可逆且

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Proof: ①. $\forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ 有

$$\begin{aligned} (A^{**}x, y) &= \overline{(A^*x, A^*y)} = \overline{(x, Ay)} \\ &= \overline{(A^*y, x)} = \overline{(y, Ax)} \\ &= (Ax, y) \end{aligned}$$

②. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ 有

$$((\alpha A + \beta B)^*x, y) = (x, (\alpha A + \beta B)y) = \bar{\alpha}(x, Ay) + \bar{\beta}(x, By)$$

Summary

CUE

$$= (\bar{A}A^* + \bar{B}B^*)x, y)$$

$$\textcircled{3} \forall x \in \mathcal{H}_2, y \in \mathcal{H}_1$$

$$(A^*x, y) = (x, Ay)$$

故一方面, 取 $y = A^*x$

$$|(A^*x, A^*x)| = (x, A(A^*x))$$

$$\leq \|x\| \cdot \|A\| \cdot \|A^*x\|$$

$$\Rightarrow \|A^*x\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$$

另一方面, 取 $x = Ay$, 则

$$\|Ay\|^2 = (A^*(Ay), y) \leq \|A^*\| \|Ay\| \|y\|$$

$$\Rightarrow \|Ay\| \leq \|A^*\| \|y\| \Rightarrow \|A^*\| \geq \|A\|$$

故 $\|A\| = \|A^*\|$.

又 $\forall x, y \in \mathcal{H}_1$ 有

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay)$$

令 $x = y$, 则

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^*A\| \|x\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\|^2 \leq \|A^*A\| \|x\|^2 \leq \|A^*\| \|A\| \|x\|^2 = \|A\|^2 \|x\|^2$$

从而 $\|Ax\| = \|A^*A\| \|x\|$, 同理 $\|A^*x\| = \|A^*\| \|x\|$.

$$\textcircled{4} ((CB)^*x, y) = (x, CB^*y) = (C^*x, B^*y)$$

$$= (B^*C^*x, y)$$

⑤ 设 A 有界可逆, 则 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Summary

CUE

由 $(CB)^* = B^*C^*$ 知

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = I^* = I_{\mathcal{H}_2}$$

从而 A^* 可逆且逆为 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

定理: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ 则

$$\rho(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\} \quad \sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Proof: $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \lambda I - A$ 可逆 $\Rightarrow (\lambda I - A)^*$ 可逆

而 $(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^*$ 故 $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$

另一方面, $\bar{\lambda} \in \rho(A^*) \Rightarrow \bar{\lambda} I - A^*$ 可逆

$$\Rightarrow (\bar{\lambda} I - A^*)^* = \lambda I - A \text{ 可逆} \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

$$\text{即 } \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(A^*)$$

$$\text{以及 } \lambda \notin \rho(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \notin \rho(A^*)$$

$$\text{即 } \lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$$

定理: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, λ 为 A 的特征值

λ 的特征向量, y 为对应于 μ 的特征向量, 则

$$\lambda \neq \bar{\mu} \Rightarrow (x, y) = 0$$

$$\text{Proof: } \lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y)$$

$$= (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y)$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\mu})(x, y) = 0$$

$$\text{由 } (\lambda - \bar{\mu}) \neq 0 \text{ 知 } (x, y) = 0$$

定理: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ 则 A^*

Summary

CUE

分别为 A 的 Banach 共轭算子与 Hilbert 共轭算子, 则存在 2 个线性同构 $B: \mathcal{H}_1^* \rightarrow \mathcal{H}_2^*$ 及 $C: \mathcal{H}_2^* \rightarrow \mathcal{H}_1^*$ 使得

$$A^* = BA^*C^{-1}$$

Proof. 由 Riesz 表示定理 $\forall f \in \mathcal{H}_1^*, g \in \mathcal{H}_2^*, \exists u \in \mathcal{H}_1, v \in \mathcal{H}_2$

$$f(x) = (x, u) \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

$$g(y) = (y, v) \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$$

记 $f \mapsto u, g \mapsto v$ 分别为 B, C , 则

$$f(x) = (x, Bf), g(y) = (y, Cg)$$

由于 $\forall f \in \mathcal{H}_1^*, g \in \mathcal{H}_2^*$,

$$\langle f, Ag \rangle = \langle A^*f, g \rangle$$

$$\Rightarrow (Ag, Cf) = (y, BA^*f)$$

$$\text{而 } (Ag, Cf) = (y, A^*Cf)$$

$$\text{从而 } BA^* = A^*C \text{ 即 } A^* = BA^*C^{-1}$$

Remark 上述定义的 B, C 为共轭性映射. 事实上:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in \mathcal{H}_1^*, x \in \mathcal{H}_1$ 有

$$\langle \alpha f + \beta g, x \rangle = (x, B(\alpha f + \beta g))$$

$$\langle \alpha f + \beta g, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle g, x \rangle$$

$$= \alpha (x, Bf) + \beta (x, Bg)$$

$$= (x, \alpha Bf + \beta Bg)$$

$$\text{即 } B(\alpha f + \beta g) = \alpha Bf + \beta Bg.$$

Summary

CUE

定义: 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ 若 $\exists x_0 \in \mathcal{H}$ 使得

$$(x_n, y) \rightarrow (x_0, y) \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 , 记为 $x_n \rightharpoonup x_0$.

定理: 设 B 为可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的单位闭球, 则 $\forall \{x^{(n)}\} \subset B$

存在 $x_0 \in B$ 及 $\{x^{(n_k)}\} \subset \{x^{(n)}\}$ 使得

$$x^{(n_k)} \rightharpoonup x_0$$

保松

Proof. 由 $\mathcal{H}$ 可分, 设 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基, 则有同构

$$T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$$

$$x = \sum (x_i e_i) \mapsto (x_1, x_2, \dots) = (x_i)_{i=1}^\infty$$

从而不妨设 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{C})$ 及 $\{x^{(n)}\} \subset B$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(n)}|^2 \right)^{1/2} \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

从而对于任意给定的 $n \geq 1$

$$|x_j^{(n)}| \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

从而由对角线法则知存在 $x \in \ell^2$ 及 $\{x^{(n_k)}\}$ 子列 $\{x^{(n_k)}\}$

使得 $\{x^{(n_k)}\}$ 每个分量都收敛于 x , 从而由于

$$\sum_{i=1}^m |x_i^{(n_k)}|^2 \leq \sum_{i=1}^m |x_i^{(n)}|^2 \leq 1 \quad \forall m \geq 1$$

故从 $k \rightarrow \infty$ 有 $\sum_{i=1}^m |x_i|^2 \leq 1$, 令 $m \rightarrow \infty$ 知 $\|x\| \leq 1$ 即

$x \in B$. $\forall y \in \ell^2$, 由 $\sum |y_i|^2 = \|y\|^2 < \infty$ 知级数

$\sum_{i=1}^\infty |y_i|$ 绝对收敛. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ 使得

$$\left(\sum_{i=N+1}^\infty |y_i|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon/4$$

Summary

CUE

$$\begin{aligned} \text{则 } |(x - x^{(n)}, y)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^{(n)}) \overline{y_i} \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^{(n)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon_2 + \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^{(n)}|^2 \right)^{1/2} \|y\| \end{aligned}$$

从而由 $x^{(n)}$ 依坐标收敛于 x 知 $\exists K \geq 1$ 使得

$$\|y\| \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^{(n)}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon_2$$

故 $x^{(n)} \rightarrow x$. 至此命题得证.

定理: 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, 则 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

为算子当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{H}_1$ 的有限维子空间 M 使得

$$\|A - PA\| < \varepsilon.$$

Proof: 充分性是显然的, 下证必要性.

记 $B_{\mathcal{H}_1}$ 为 $\mathcal{H}_1$ 中单位闭球, 由 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

知 $A(B_{\mathcal{H}_1})$ 为列紧集, 从而完全有界, 故 $\forall \varepsilon > 0$

存在 $A(B_{\mathcal{H}_1})$ 的 $\varepsilon/2$ -网 $\{x_i\}_{i=1}^m$, 则 $\forall x \in B_{\mathcal{H}_1}$

$\exists x_i$ 使得 $\|Ax - Ax_i\| < \varepsilon/2$.

记 $M = \text{span}\{x_i\}_{i=1}^m$, 则 M 为 $\mathcal{H}_1$ 的有限维子

空间, 断言: $\|PA - A\| < \varepsilon$. 事实上: $\forall x \in B_{\mathcal{H}_1}$

$\exists x_i$ 使得 $\|Ax - Ax_i\| < \varepsilon/2$, 故

$$\begin{aligned} \|PAx - Ax\| &\leq \|PAx - PAx_i\| + \|PAx_i - Ax\| \\ &\quad + \|Ax_i - Ax\| \end{aligned}$$

CUE

而 $\|P_M\| \leq 1$, $P_M Ax_i = Ax_i$, 故

$$\|P_M Ax - Ax\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_{\mathcal{H}_1}$$

即有 $\|PA - A\| \leq \varepsilon$.

Remark: $\forall x, y \in \mathcal{H}_1$, $M \subset \mathcal{H}_1$ 为闭子空间, 则

$$\begin{aligned} (P_M x, y) &= (P_M x, y - P_M y + P_M y) \\ &= (P_M x, P_M y) + (P_M x, y - P_M y) \end{aligned}$$

而 $P_M x \in M$, $y - P_M y \in M^\perp$, 故

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_M y)$$

同理 $(x, P_M y) = (P_M x, P_M y)$, 故 $P_M^* = P_M$.

推论: $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 Hilbert 空间, 则

$$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$$

Proof: 只证必要性, 充分性由 $A^{**} = A$ 立得. 事实上由

$$\begin{aligned} \|A^* - A^* P_M\| &= \|A^* - A^* P_M A\| = \|(A - P_M A)^*\| \\ &= \|A - P_M A\| \end{aligned}$$

及上个定理立即得证.

定理: 设 A 为可分 Hilbert 空间上的全连续算子, 则 $\forall n \geq 1$, 存

在有限秩算子 A_n 使得

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Proof: 由 $\mathcal{H}$ 可分存在正规正交基 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则 $\forall x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax, e_i) e_i$$

Summary

Summary

CUE

定义算子 $A_n x = \sum_{i=1}^n (Ax, e_i) e_i$, 则 A 有穷秩

断言: $\|A_n - A\| \rightarrow 0$,

若不然, 反设 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $\{A_n\}$ 子列 $\{A_{n_k}\}$ 使得

$$\|A_{n_k} - A\| \geq \varepsilon_0$$

从而 $\forall k \geq 1, \exists x_k \in B_{\mathcal{H}}$ 使得

$$\|(A_{n_k} - A)x_k\| > \varepsilon_0/2$$

由 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 知 $\{Ax_k\}$ 有收敛子列, 不妨仍记为

$\{Ax_k\}$, 设 $Ax_k \rightarrow y$ as $k \rightarrow \infty$

则 $\|A_{n_k} x_k - y\| \leq \|A_{n_k} x_k - Ax_k\| + \|Ax_k - y\|$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{\infty} (Ax_k - y, e_i) e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| \\ &\leq \|Ax_k - y\| + \sum_{i=n_k+1}^{\infty} |(y, e_i)|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

矛盾.

定理: 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 则

$$\textcircled{1} N(A) = R(A^*)^\perp$$

$$\textcircled{2} N(A^*) = R(A)^\perp$$

$$\textcircled{3} N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$$

$$\textcircled{4} N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$$

Proof 由 Hilbert 空间自反及闭值域定理立得.

定义: $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 若 $A = A^*$, 称 A 为

CUE

对称算子.

定理: 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, 则

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ 自伴} \Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Proof: " $\Rightarrow$ " 由 A 自伴知, $\forall x \in \mathcal{H}$

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$$

即 $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

" $\Leftarrow$ " 设 $(Ax, x) \in \mathbb{R} (\forall x \in \mathcal{H})$, 记 $\alpha(x, y) = (Ax, y)$

则 $\alpha(x, x) = \overline{\alpha(x, x)}$ 从而

$$\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = \overline{\alpha(x, y)} + \overline{\alpha(y, x)} \quad \textcircled{1}$$

将 y 替换为 iy , 有

$$-i\alpha(x, y) + i\alpha(y, x) = i\overline{\alpha(x, y)} - i\overline{\alpha(y, x)} \quad \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1}$ 立得 $\alpha(x, y) = \overline{\alpha(y, x)}$

即 $(Ax, y) = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$

定理: 设 A 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 则

$\textcircled{1}$ A 的特征向量均为实数

$\textcircled{2}$ A 不同特征值对应的特征向量相互正交.

Proof: $\textcircled{1}$ $\lambda(x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{2} \quad \lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y)$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow (x, y) = 0.$$

引理: 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, A 为 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 则

Summary

Summary

CUE

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Proof. $\forall x \in \mathcal{H}$ 有

$$|(Ax, x)| \leq \|A\| \|x\|^2$$

$$\text{故 } \|A\| \geq \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| =: \alpha.$$

$$\text{又 } |(A(x+y), x+y)| \leq \alpha \|x+y\|^2$$

$$|(A(x-y), x-y)| \leq \alpha \|x-y\|^2$$

$$\Rightarrow 4\operatorname{Re}(x, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$$

$$\leq 2\alpha (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$\leq 2\alpha (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

取 $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ 得

$$4\|Ax\| \cdot \|x\| \leq 4\alpha \|x\|^2$$

$$\text{从而 } \|A\| \leq \alpha \text{ 即 } \|A\| = \alpha.$$

定理: 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, A 为 $\mathcal{H}$ 上的全连续自伴算子

$$\text{则 } r(A) = \|A\|.$$

Proof. 由引理, 不妨设

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) =: \alpha$$

若不然, 用 $-A$ 代替 A 即可. 故 $\exists \{x_n\}, \|x_n\|=1$

$$(Ax_n, x_n) \rightarrow \alpha$$

$$\text{则 } \|Ax_n - \alpha x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 + \alpha^2 - 2\alpha (Ax_n, x_n)$$

$$\leq \|A\|^2 + \alpha^2 - 2\alpha (Ax_n, x_n) \rightarrow 0$$

Summary

CUE

由 $A \in C(\mathcal{H})$ 知 $\exists \{x_n\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$Ax_n \rightarrow y$$

$$\text{则由 } Ax_n - \alpha x_n \rightarrow 0$$

$$\text{知 } x_n \rightarrow \frac{1}{\alpha} y$$

从而由 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 知 $Ax_n \rightarrow \frac{1}{\alpha} Ay$ 进一步

$$Ay = \alpha y$$

又 $\|y\| = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = \alpha \neq 0$, 故 α 为 A 的特征值

$$\text{从而 } \alpha = \|A\| \in \sigma(A) \Rightarrow \|A\| \leq r(A)$$

$$\text{而 } r(A) \leq \|A\| \text{ 显然. 故 } r(A) = \|A\|.$$

推论: 设 A 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的全连续算子, 则 $\|A\|$ 之一为 A 的特征值.

定理 (Hilbert-Schmidt) 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $A \in C(\mathcal{H})$

则 A 的非零谱点均为 A 的特征值且至多可列, 将其按绝对值由大到小排列, 则 $|\lambda_n| \rightarrow 0$

进一步可选取 A 的单位特征向量 $\{e_n\}$ s.t. $\{e_n\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基且 $\forall x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \sum \lambda_j (x, e_j) e_j.$$

Summary