矩阵分析作业 (7 ~ 8)

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2023 年 5 月 28 日

第七次作业

【题目 1】 求矩阵的的 $\{1\}$-逆 $A^{(1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解. 对 A 进行初等行变换有

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 A 的满秩分解为 $A = PQ$，其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

又注意到

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ O \end{pmatrix} = \widetilde{P} \begin{pmatrix} I_2 \\ O \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} I_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O \end{pmatrix} \widetilde{Q}$$

从而

$$A = \widetilde{P} \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \widetilde{Q}$$

故

$$A\{1\} = \left\{ \widetilde{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} \widetilde{P} : \forall\, x_j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le 8 \right\}.$$

□

【题目 2】 证明: 方阵 A 非奇异的充分必要条件是它有唯一的 $\{1\}$-逆，就是 A^{-1}。

证明. 必要性：由于 A 非奇异，则 $\forall\, G \in A\{1\}$ 有

$$AGA = A \qquad \Longrightarrow \qquad G = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1},$$

从而

$$A\{1\} = \{A^{-1}\}.$$

充分性：设 $A\{1\}$ 只有一个元素。反设 A 不满秩，则存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, \qquad r < n.$$

从而

$$Q\begin{pmatrix} I_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} P, \qquad \forall\, G_{ij}$$

都是 A 的 1 逆，这与 $A\{1\}$ 只有一个元素矛盾，故 A 可逆。 □

【题目 3】 设 $\mathrm{rank}(BC) = \mathrm{rank}(C)$，证明：存在矩阵 D 使得 $C = DBC$ 且 $(BC)^{(1)}B$ 是 C 的一个 $\{1\}$-逆。

证明. 由于 $\mathrm{rank}(BC) = \mathrm{rank}(C)$，从而 $\mathrm{rank}(C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rank}(C^{\mathrm{T}})$。由于 $\forall\, x$

$$C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}y = C^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}y) \in R(C^{\mathrm{T}}) \qquad \Longrightarrow \qquad R(C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) \subseteq R(C^{\mathrm{T}}).$$

从而

$$R(C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) = R(C^{\mathrm{T}}).$$

故存在可逆矩阵 A 使得

$$C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A \qquad \Longrightarrow \qquad (A^{\mathrm{T}})^{-1}BC = C.$$

令 $D = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$，则

$$C = DBC.$$

又

$$C(BC)^{(1)}BC = DBC(BC)^{(1)}BC = DBC = C$$

从而

$$(BC)^{(1)}B \in C\{1\}.$$

□

【题目 4】 证明：

1. $R(AB) = R(A)$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$。
2. $N(AB) = N(B)$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B)$。

证明.

1. 由于 $\forall\, x$ 有

   $$ABx = A(Bx) \subseteq R(A) \qquad \Longrightarrow \qquad R(AB) \subseteq R(A)$$

   从而

   $$R(AB) = R(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim(R(AB)) = \dim(R(A)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A).$$

2. 由于 $\forall\, x \in N(B)$

$$Bx = 0 \implies ABx = (AB)x = 0 \implies N(B) \subseteq N(AB).$$

从而

$$\begin{aligned} N(B) = N(AB) &\iff \dim(N(B)) = \dim(N(AB)) \\ &\iff \dim(R(B)) = \dim(R(AB)) \\ &\iff \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(AB). \end{aligned}$$

□

【题目 5】 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的第 (i,j) 元素为 1, 其余元素皆为 0, 求其 $\{1,2\}$-逆的一般形式。

证明. 注意到

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & O_{1\times n-1} \\ O_{m-1\times 1} & O_{m-1\times n-1} \end{pmatrix} Q.$$

其中 P 为单位矩阵交换第 j 行与第 1 行得到的矩阵，Q 是单位矩阵交换第 1 列与第 j 列得到的矩阵。从而

$$A\{1,2\} = \left\{ P\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{\mathrm{T}} \\ \beta & \beta\alpha^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} Q : \forall\, \alpha \in \mathbb{C}^{m-1}, \beta \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}.$$

□

【题目 6】 求下列矩阵的一个 $\{1,2\}$-逆

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 对其做初等行变换有

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而其满秩分解为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PQ$$

故 $\{1,2\}$-逆为

$$A^{(1,2)} = Q_R^{-1}P_L^{-1} = Q^{\mathrm{T}}(QQ^{\mathrm{T}})^{-1}(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

第八次作业

【题目 7】 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 & 4+2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的 $\{1,2,3\}$-逆。

解.

$$A^{\mathrm{H}}A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&4&2+2\mathrm{i}\\0&0&0&1&2&1+\mathrm{i}\\0&2&1&10&22-4\mathrm{i}&10+9\mathrm{i}\\0&4&2&22-4\mathrm{i}&48-16\mathrm{i}&26+16\mathrm{i}\\0&2+2\mathrm{i}&1+\mathrm{i}&10+9\mathrm{i}&26+16\mathrm{i}&2+18\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

从而

$$A^{(1,2,3)}=(A^{\mathrm{H}}A)^{(1)}A$$

□

【题目 8】 证明集合 $A\{1,4\}$ 为矩阵方程

$$XA=A^{(1,4)}A$$

的解集，其中 $A^{(1,4)}$ 是 $A\{1,4\}$ 的任意一元。

证明. 记

$$E=\{X:XA=A^{(1,4)}A\},$$

那么一方面 $\forall\, X\in E$ 有

$$AXA=AA^{(1,4)}A=A,\qquad (XA)^{\mathrm{H}}=\left(A^{(1,4)}A\right)^{\mathrm{H}}=A^{(1,4)}A=XA$$

从而 $X\in A\{1,4\}$，故 $E\subseteq A\{1,4\}$。

另一方面 $\forall\, X\in A\{1,4\}$，令 $A^{(1,4)}=X$ 有 $XA=A^{(1,4)}A$，从而 $A\{1,4\}\subseteq E$。综上 $E=A\{1,4\}$。 □

【题目 9】 证明：设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $v\in\mathbb{C}^m$, $A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$，且方程 $Ax=b$ 有解即 $b\in R(A)$，则 x_0 是其 L-N 解的充要条件为 $x_0=A^{(1,4)}b$。

证明.

充分性。只需验证 $A^{(1,4)}b\in R(A^{\mathrm{H}})$ 即可。设 $x_0=A^{(1,4)}b$，那么 x_0 是方程 $Ax=b$ 的一个解。又 $b\in R(A)$，那么存在 $y\in\mathbb{C}^n$ 使得

$$b=Ay.$$

从而

$$x_0=A^{(1,4)}b=A^{(1,4)}Ay=\left(A^{(1,4)}A\right)^{\mathrm{H}}y=A^{\mathrm{H}}\left(A^{(1,4)}\right)^{\mathrm{H}}y\in R(A^{\mathrm{H}})$$

从而 x_0 是 $Ax=b$ 的 L-N 解。

必要性。由 x_0 是 $Ax=b$ 的 L-N 解知

$$x_0\in R(A^{\mathrm{H}})=R\left(\left(A^{(1,4)}A\right)^{\mathrm{H}}\right)=R\left(A^{(1,4)}A\right)$$

而 $AA^{(1,4)}$ 是幂等矩阵，从而

$$x_0=A^{(1,4)}Ax_0=A^{(1,4)}\left(Ax_0\right)=Ab.$$

□

【题目 10】 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}$ 用满秩分解求 A^{+}。

解. 对 A 进行初等行变换有

$$A \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 A 的满秩分解为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PQ.$$

从而

$$A^{+} = Q^{+}P^{+} = Q^{\mathrm{H}}\left(QQ^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\left(P^{\mathrm{H}}P\right)^{-1}P^{\mathrm{H}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

【题目 11】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，用奇异值分解求 A^{+}。

证明. 设 $A = USV^{\mathrm{H}}$ 由于

$$A^{\mathrm{H}}A = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} = VSV^{\mathrm{H}}$$

从而 $S_1 = \mathrm{diag}\{\sqrt{2}, \sqrt{1}\}$, $V = I$。且

$$AA^{\mathrm{H}} = U\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}U^{\mathrm{H}}$$

解得

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 1 & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

从而

$$A^{+} = V\begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

□

【题目 12】 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求矩阵 A 的 Jordan 标准型 J，并求变换矩阵 P，使

$$P^{-1}AP = J.$$

解. 令 $|A - \lambda I| = 0$ 即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0$$

从而

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

而 $\mathrm{rank}(A-\lambda I) = 1$ 从而其解空间的维数为 2 故其 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

记

$$AP = PJ, \qquad P = (x_1, x_2, x_3).$$

那么

$$Ax_1 = x_1, \quad Ax_2 = x_2, \quad Ax_3 = x_2 + x_3.$$

解得

$$x_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \qquad x_2 = (1,2,-1)^{\mathrm{T}} \qquad x_3 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

故

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

【题目 13】 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 $A^{1/2}$ 和 $\ln A$。

<u>**解.**</u> 令 $|A-\lambda I| = 0$ 解得

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2.$$

从而令

$$AP = P\Lambda, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}\{-1,1,2\}.$$

解得

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

故

$$A^{1/2} = P \begin{pmatrix} \mathrm{i} & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \ln A = P \begin{pmatrix} \ln(-1) & & \\ & 0 & \\ & & \ln 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

【题目 14】 X 是 $m \times n$ 矩阵变量，证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \mathrm{tr}\left(XX^{\mathrm{T}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \mathrm{tr}\left(X^{\mathrm{T}}X\right) = 2X.$$

证明. 设 $X=(a_{ij})$，则

$$\operatorname{tr}\left(XX^{\mathrm{T}}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{2}=\operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}X\right).$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\operatorname{tr}\left(XX^{\mathrm{T}}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}X\right)=2\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=2X.$$

□