矩阵分析作业 (4 ∼ 6)

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2023 年 4 月 14 日

第四次作业

【题目 1】 证明 Hamilton-Cayley 定理:

证明. 首先证明一个引理：任一复方阵必然相似于一个上三角阵。

采用数学归纳法，设 A 是一个 n 阶复矩阵。当 $n=1$ 是显然，假设 $n-1$ 时成立，现在对 n 阶矩阵 A 来证明。设 λ 是 A 的一个特征值，则存在非零向量 α_1 使得

$$A\alpha_1 = \lambda\alpha_1.$$

将 α_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，并记

$$P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

那么 P 是一个非奇异的矩阵并且

$$AP = A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (A\alpha_1, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)$$

又由于 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基，从而 AP 的每一列向量都可以由其表示，注意到

$$AP = (\alpha_1, \cdot, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是一个 $n-1$ 阶方阵，故

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

从而由归纳假设知存在非奇异的 $n-1$ 阶矩阵 Q 使得 $Q^{-1}A_1Q$ 是一个上三角矩阵。现令

$$R = P\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

那么

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}$$

是一个上三角矩阵，它与 A 相似。

从而对于 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A，存在一个可逆复矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，B 是一个上三角矩阵。但 A 与 B 有相同的特征多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda_j).$$

其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 是 B 的特征值。

设

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

那么一次用单位向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 作用有

$$\begin{aligned}&B\varepsilon_1=\lambda_1\varepsilon_1\\ &B\varepsilon_2=a_{12}\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2\\ &\cdots\\ &B\varepsilon_n=a_{12}\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n\end{aligned}$$

那么由 $B\varepsilon_1=\lambda_1\varepsilon_1$ 知

$$f(B)\varepsilon_j=\left(\prod_{2\le i\le n}(B-\lambda_i I)\right)\cdot(B-\lambda_1 I)\varepsilon_1=0$$

设 $1\le j\le n$，以及对于任意的 $i<j$ 都有

$$f(B)\varepsilon_i=0$$

那么对于 ε_j 有

$$\begin{aligned}f(B)\varepsilon&=\left(\prod_{i=j+1}^{n}(B-\lambda_i I)\right)\left(\prod_{i=1}^{j-1}(B-\lambda_i I)\right)\cdot(B-\lambda_j I)\varepsilon_j\\ &=\left(\prod_{i=j+1}^{n}(B-\lambda_i I)\right)\left(\prod_{i=1}^{j-1}(B-\lambda_i I)\right)\cdot(B-\lambda_j I)\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_{1i}\varepsilon_i\right)\\ &=\sum_{i=1}^{j-1}\left(\prod_{i=j+1}^{n}(B-\lambda_i I)\right)\left(\prod_{i=1}^{j-1}(B-\lambda_i I)\right)\cdot(B-\lambda_j I)\varepsilon_j=0\end{aligned}$$

这说明

$$f(B)=O.$$

从而

$$f(A)=a_0 I+\sum_{k=1}^{n}a_k A^k=Pf(B)P^{-1}=O.$$

□

【题目 2】 如果 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且满足 $(A-I)(A-2I)(A-3I)=O$，证明 A 是可对角化的。

证明. 由 $(A-I)(A-2I)(A-3I)=O$ 知

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

是 A 的一个零化多项式。而 A 的极小多项式 $m(x)\mid f(x)$，从而 $m(x)$ 可以分解为一次多项式的乘积，故 A 可以对角化。 □

【题目 3】 求矩阵的不变因子

$$\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -2 & \lambda+1\end{pmatrix}.$$

解. 对该 λ-矩阵其作初等行列变换有

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & 3 \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

从而

$$D_3(\lambda) = (\lambda-1)^3 \qquad D_2(\lambda) = 1 \qquad D_1(\lambda) = 1$$

从而不变因子为

$$g_1(\lambda) = 1 \qquad g_2(\lambda) = 1 \qquad g_3(\lambda) = (\lambda-1)^3.$$

□

【题目 4】 求矩阵的初等因子

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & & \\ & \lambda-1 & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

解. 记

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & & \\ & \lambda-1 & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

那么 A 的行列式因子为

$$1, 1, 1, |A|.$$

而

$$A = x^4 + 4 = (x+1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i})$$

从而初等因子为

$$(x+1+\mathrm{i}) \ \ (x+1-\mathrm{i}) \ \ (x-1+\mathrm{i}) \ \ (x-1-\mathrm{i})$$

□

【题目 5】 求矩阵的 Jordan 标准形

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 记

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

用初等变换把 $\lambda I - A$ 化为对角 λ-矩阵并求出其初等因子组为

$$(\lambda-1)^2 \qquad (\lambda-1)^2.$$

从而 A 的 Jordan 标准型为

$$J=\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&&\\&&1&1\\&&0&1\end{pmatrix}.$$

□

第五次作业

【题目 6】 证明矩阵 A 与 B 相似等价于 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价。

证明.

必要性：设 A 与 B 相似，那么存在可逆矩阵 S 使得

$$A=S^{-1}BS.$$

从而

$$S^{-1}(\lambda I-B)S=\lambda I-S^{-1}BS=\lambda I-B.$$

从而 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价。

充分性：设 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价，那么存在可逆 λ 矩阵 $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ 使得

$$U(\lambda)(\lambda I-A)V(\lambda)=\lambda I-B \qquad\Longrightarrow\qquad U(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V(\lambda)^{-1}.$$

又存在数字矩阵 U_0,V_0 以及 λ-矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$ 使得

$$U(\lambda)=(\lambda I-B)P(\lambda)+U_0 \qquad V(\lambda)=Q(\lambda)(\lambda I-A)+V_0.$$

从而

$$(\lambda I-B)\left(P(\lambda)(\lambda I-A)-V(\lambda)^{-1}\right)=-U_0(\lambda I-A).$$

对比系数知

$$P(\lambda)(\lambda I-A)-V(\lambda)^{-1}$$

是一个数字矩阵，从而令其为 T。即

$$T=P(\lambda)(\lambda I-A)-V(\lambda)^{-1} \qquad\Longrightarrow\qquad (\lambda I-B)T=-U_0(\lambda I-A)$$

进而

$$\lambda(T+U_0)=BT+U_0A.$$

对比系数知

$$T+U_0=BT+U_0A=0.$$

从而只需要证明 T 可逆即可。

由于

$$T=P(\lambda)(\lambda I-A)-V(\lambda)^{-1} \qquad\Longrightarrow\qquad TV(\lambda)-P(\lambda)(\lambda I-A)V(\lambda)=I$$

又

$$P(\lambda)(\lambda I-A)V(\lambda)=P(\lambda)U(\lambda)^{-1}(\lambda I-B), \qquad V(\lambda)=Q(\lambda)(\lambda I-A)+V_0$$

从而

$$TV_0+\left(TQ(\lambda)-P(\lambda)U(\lambda)^{-1}\right)(\lambda I-A)=I$$

对比系数知 $I=TV_0$，从而可逆。 □

【题目 7】 证明 Schur 不等式: 若 n 阶复方阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则有:

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

等号成立当且仅当 A 是正定矩阵。

证明. 由于 A 必然复相似一个上三角矩阵 T，从而存在可逆矩阵 U 使得

$$UAU^{\mathrm{H}}=T$$

其中 T 的对角元 t_{jj} $(1\le j\le n)$ 是 A 的特征值。又注意到

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=\sum_{j=1}^{n}|t_{jj}|^2\le\sum_{j=1}^{n}|t_{jj}|^2+\sum_{i<j}|t_{ij}|^2=\mathrm{tr}\left(TT^{\mathrm{H}}\right)=\mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{H}}\right)=\sum_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|^2.$$

A 正规当且仅当 $TT^{\mathrm{T}}=T^{\mathrm{T}}T$，而这又当且仅当 TT^{H} 是一个对角矩阵，这当且仅当

$$\sum_{i<j}|t_{ij}|^2=0\qquad\Longrightarrow\qquad\sum_{1\le j\le n}|\lambda_j|^2=\sum_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|^2.$$

□

【题目 8】 求矩阵正交分解和满秩分解

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&4\\-1&1&-1&-2\\1&1&-1&-2\\-1&-1&1&4\end{pmatrix}$$

解.

正交分解: 记原矩阵为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$。

$$\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1\\\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2\\\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\alpha_2\\\beta_4&=\alpha_4-\frac{(\beta_1,\alpha_4)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_4)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\beta_3,\alpha_4)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=\alpha_4-\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{3}{2}\alpha_3\end{aligned}$$

从而

$$(\beta_1,\cdots,\beta_4)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&-1&-\frac{3}{2}\\&&1&-\frac{3}{2}\\&&&1\end{pmatrix}$$

令 $\varepsilon_j=\beta_j/|\beta_j|(1\le j\le 4)$ 那么

$$(\beta_1,\cdots,\beta_4)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&4&\\&&&2\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

从而令 $Q=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)$，

$$R=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&4&\\&&&2\sqrt{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&-1&-\frac{3}{2}\\&&1&-\frac{3}{2}\\&&&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&4&6\sqrt{10}\\&&4&3\sqrt{10}\\&&&2\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

那么

$$A=QR.$$

满秩分解: 将 A 进行初等行变换化为最简形

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&&&\\&1&-1&\\&&&2\\&&&0\end{pmatrix}$$

从而

$$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\-1&-1&-2\\1&-1&-2\\-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&-1&\\&&&2\end{pmatrix}$$

□

【题目 9】 请问 A 是否为正规矩阵? 若是，求它的酉相似对角分解

$$\begin{pmatrix}-1&\mathrm{i}&0\\-\mathrm{i}&0&\mathrm{i}\\0&-\mathrm{i}&-1\end{pmatrix}$$

解. 将原矩阵记为 A，由于

$$A^{\mathrm{H}}=A$$

那么 A 必然是正规矩阵。令 $|\lambda I-A|=0$ 有

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0\qquad\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$$

那么 $\lambda=0$ 对应的特征向量为

$$\xi_1=(1,-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}$$

$\lambda=-1$ 的特征向量为

$$\xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$\lambda=-2$ 的特征向量为

$$\xi_3=(1,\mathrm{i},-1)^{\mathrm{T}}$$

令

$$U=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_1,\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2,\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3\right)$$

那么

$$A=U\Lambda U^{\mathrm{H}}.$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}\{0,-1,-2\}$。 □

第六次作业

【题目 10】 求矩阵的奇异值分解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解. 记原矩阵为 A，设其奇异值分解为

$$A = SVD^{\mathrm{H}}.$$

从而

$$AA^{\mathrm{H}} = SV^2S^{\mathrm{H}}$$

由于

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $\lambda = 1, 3$，对应的特征向量为

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^{\mathrm{T}}$$

那么 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值为 $\lambda = 1, 3, 0$。由于 $V = \mathrm{diag}\{1, \sqrt{3}\}$ 知

$$D = A^{\mathrm{H}}V^{-1}S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

故 $A^{\mathrm{H}}A$ 的 $1, 3$ 对应的特征向量为

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}, \qquad d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

由 d_3 与 d_1, d_2 的正交性可得

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$$

从而

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{T}} \\ d_2^{\mathrm{T}} \\ d_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

是 A 的奇异值分解。 □

【题目 11】 考虑空间 $\mathbb{C}^4$ ，取其基底为

$$\mathfrak{B} = \{(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\} = \{\alpha_M, \beta_M, \alpha_L, \beta_L\}$$

令

$$M = \mathrm{span}\{\alpha_M, \beta_M\}, \qquad L = \mathrm{span}\{\alpha_L, \beta_L\}.$$

则有 $\mathbb{C}^4 = M \oplus L$，定义线性变换 T 为

$$T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \mapsto (x_3, x_3, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$$

证明 T 是一个沿着 M 向 L 的投影算子。

证明. 首先证明 $L = R(T)$。

一方面 $\forall\, x \in L$，存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ 使得

$$x = k_1\alpha_L + k_2\beta_L = k_1(1,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(1,1,1,1)^{\mathrm{T}} = (k_1+k_2)(1,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

故

$$x = T((k_1+k_2)\alpha_L + k_2\beta_L) \in R(T) \qquad \Longrightarrow \qquad L \subseteq R(T).$$

另一方面 $\forall\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}$

$$T(x) = (x_3 - x_4)(1,1,1,0)^{\mathrm{T}} + x_4(1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \in L \qquad \Longrightarrow \qquad R(T) \subseteq L.$$

从而 $L = R(T)$。

再证明 $M = N(T)$。

一方面，$\forall\, x \in M$，存在 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$ 使得

$$x = \ell_1(1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + \ell_2(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

从而

$$T(x) = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \qquad \Longrightarrow \qquad M \subseteq N(T).$$

另一方面，注意到

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = Ax$$

故 $\forall\, x \in N(T)$，有

$$Ax = 0$$

解这个线性方程组得

$$x = k_1(1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}. = k_1\alpha + k_1\beta.$$

显然

$$N(T) = \mathrm{span}\{\alpha, \beta\} = \mathrm{span}\alpha_M, \beta_M = M.$$

故 $N(T) = M$。

最后证明 $T|_L = I$。

这是由于

$$T(\alpha_L, \beta_L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_L, \beta_L)I.$$

综上 T 是一个沿着 M 向 L 的投影算子。 □

【题目 12】 若 T 改为

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_4)^{\mathrm{T}}$$

证明 T 不是一个沿着 M 向 L 的投影算子。

证明. 这是因为

$$T(\alpha_L, \beta_L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (\alpha_L, \beta_L)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $T|_L$ 不是一个恒等变换，故 T 不是一个沿着 M 向 L 的投影算子。 □