随机过程第一次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 9 月 26 日

【题目 1】 设 X 是非负连续型随机变量，证明

$$\mathbb{E}\left(X^{\alpha}\right)=\int_0^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 由分布积分立即得到：

$$\mathbb{E}\left(X^{\alpha}\right)=\int_0^{\infty}x^{\alpha}\,\mathrm{d}F(x)=-\int_0^{\infty}x^{\alpha}\,\mathrm{d}\overline{F}(x)=\int_0^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x-x^{\alpha}\overline{F}(x)\big|_0^{\infty}=\int_0^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x$$

其中

$$F(x)=\mathbb{P}(X<x),\qquad \overline{F}(x)=\mathbb{P}(X\geq x)=1-F(x).$$

□

【题目 2】 设 $\mathbb{P}(AB)>0$，则

$$\mathbb{P}_A(C|B)=\mathbb{P}(C|AB).$$

Proof. 直接计算有

$$\mathbb{P}_A(C|B)=\frac{\mathbb{P}_A(BC)}{\mathbb{P}_A(B)}=\frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(A)}\cdot\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(AB)}=\frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(AB)}=\mathbb{P}(C|AB).$$

□

【题目 3】 设 $\mathbb{P}(A)>0$，推导乘法公式

$$\mathbb{P}(B_1\cdots B_n|A)=\mathbb{P}(B_1|A)\mathbb{P}(B_2|B_1A)\cdots\mathbb{P}(B_n|B_1\cdots B_{n-1}A).$$

Proof. 运用数学归纳法，当 $n=1$ 时显然成立，设 $n=k-1$ 时成立，则

$$\mathbb{P}(B_1\cdots B_k|A)=\mathbb{P}(B_1\cdots(B_{k-1}B_k)|A)=\mathbb{P}(B_1|A)\mathbb{P}(B_2|B_1A)\cdots\mathbb{P}(B_kB_{k-1}|B_1\cdots B_{k-2}A)$$

而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_kB_{k-1}|B_1\cdots B_{k-2}A)&=\frac{\mathbb{P}(B_1\cdots B_kA)}{\mathbb{P}(B_1\cdots B_{k-2}A)}=\frac{\mathbb{P}(B_1\cdots B_kA)}{\mathbb{P}(B_1\cdots B_{k-1}A)}\cdot\frac{\mathbb{P}(B_1\cdots B_{k-1}A)}{\mathbb{P}(B_1\cdots B_{k-2}A)}\\&=\mathbb{P}(B_{k-1}|B_1\cdots B_{k-2}A)\cdot\mathbb{P}(B_k|B_1\cdots B_{k-1}A).\end{aligned}$$

故命题成立。 □

【题目 4】 设 $\{X_i\}$ 是来自 X 的独立随机变量，$\mathbb{E}X=\mu,\mathrm{Var}(X)=\sigma^2<\infty$。对于 $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，计算

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right),\qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)$$

Solution. 由于 $\{X_i\}$ 相互独立，故

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}X_i = N\mu.$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}X_i = N\sigma^2.$$

□

【题目 5】 设 X 是非负随机变量，$\{X_i\}_{i=1}^{n}$ 是来自总体 X 的样本，$k \le n$

1. 计算 $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_k | X_1 + \cdots X_n = t)$.
2. 若 U 在 $[0, t]$ 上均匀分布，且与 X_1, X_2 独立，计算

$$\mathbb{P}(U < X_1 | X_1 + X_2 = t).$$

Solution.

1. 注意到

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_k | X_1 + \cdots X_n = t) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(X_j | X_1 + \cdots X_n = t)$$

由于 $\{X_i\}$ 相互独立，故

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_k | X_1 + \cdots X_n = t) = k\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \cdots X_n = t)$$

在上述等式中取 $k = n$ 得

$$n\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \cdots X_n = t) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n | X_1 + \cdots X_n = t) = t$$

进而

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_k | X_1 + \cdots X_n = t) = k\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \cdots X_n = t) = k \cdot \frac{t}{n} = \frac{kt}{n}.$$

2. 设 X 的分布函数为 $F(x)$，则其诱导了一个 Borel 测度 μ_F，简便起见，记

$$\mathrm{d}\mu_F = \mathrm{d}F,$$

即有

$$\mathbb{P}(X \le s) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X \le s}(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_0^s \mathrm{d}F(x).$$

同理记 U 的分布函数为 G，则

$$\mathrm{d}G(u) = \frac{1}{t} \cdot \mathbb{1}_{(0,t)}(u)\, \mathrm{d}u.$$

那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \le X_1, X_1 + X_2 = t) &= \int_0^t \int_0^t \mathbb{1}_{(x_1+x_2=t)}(x_1, x_2) \cdot \left(\int_0^{x_1} \mathrm{d}G(u)\right) \mathrm{d}F(x_1)\, \mathrm{d}F(x_2) \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbb{1}_{(x_1+x_2=t)}(x_1, x_2) \cdot \frac{x_1}{t}\, \mathrm{d}F(x_1)\, \mathrm{d}F(x_2)
\end{aligned}$$

但当 $s \le t$ 时

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \le s | X_1 + X_2 = t) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 \le s, X_1 + X_2 = t)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = t)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = t)} \int_0^s \left(\int_0^t \mathbb{1}_{(x_1+x_2=t)}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}F(x_2)\right) \mathrm{d}F(x_1)
\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2=t)=\int_0^t x_1\,\mathrm{d}\mathbb{P}(X_1\le s|X_1+X_2=t)=\frac{\int_0^t\int_0^t \mathbb{1}_{(x_1+x_2=t)}(x_1,x_2)\cdot x_1\,\mathrm{d}F(x_1)\,\mathrm{d}F(x_2)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=t)}$$

即

$$\mathbb{P}(U\le X_1|X_1+X_2=t)=\frac{1}{t}\cdot\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2=t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$$

上述过程中 $\mathbb{1}_A(x)$ 表示集合 A 的特征函数。

□

【题目 6】 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，$0\le s<t$，验证在条件 $N(t)=n$ 的条件下，$N(s)$ 服从二项分布 $\mathcal{B}(n,s/t)$.

Proof. 直接计算有：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s)=k|N(t)=n)&=\frac{\mathbb{P}(N(s)=k,N(t)=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}=\frac{\mathbb{P}(N(s)-N(0)=k,N(t)-N(s)=n-k)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}\\&=\frac{\mathbb{P}(N(s)=k)\cdot\mathbb{P}(N(t)-N(s)=n-k)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}=\frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\cdot\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

即命题成立。 □

【题目 7】 对于 Poisson 过程 $\{N(t)\}$，计算

$$\mathbb{E}(N(t)N(t+s)),\qquad \mathbb{E}(N(t+s)|N(t)).$$

Solution.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N(t)N(t+s))&=\mathbb{E}\left((N(t)-N(0))(N(t+s)-N(t))\right)+\mathbb{E}(N(t)^2)\\&=\mathbb{E}N(t)\cdot\mathbb{E}(N(t+s)-N(t))+\mathrm{Var}N(t)+(\mathbb{E}N(t))^2\\&=\lambda t\cdot\lambda s+\lambda t+(\lambda t)^2\\&=\lambda^2 t(s+t)+\lambda t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N(t+s)|N(t)=k)&=\mathbb{E}((N(t+s)-N(t))|N(t)=k)+\mathbb{E}(N(t)|N(t)=k)\\&=\mathbb{E}(N(t+s)-N(t))+k=\lambda s+k.\end{aligned}$$

即

$$\mathbb{E}(N(t+s)|N(t))=\lambda s+N(t).$$

□

【题目 8】 某高速路上的超速汽车流形成平均每小时 3 辆的 Poisson 过程，用 T 表示检测雷达记录 n 辆超速汽车所用时间，计算

$$\mathbb{P}(T>t).$$

Solution. 只需注意到

$$\mathbb{P}(T>t)=\mathbb{P}(N(t)\le n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k t^k}{k!}e^{-3t}.$$

□