随机过程第三次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 10 月 22 日

【题目 1】 用 $(X(t), Y(t))$ 表示二维标准布朗运动吗证明对任意的常数 θ,

$$W(t) = X(t)\cos\theta + Y(t)\sin\theta$$

是标准的布朗运动

Proof. 由于 $X(t), Y(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$. 从而

$$W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$$

故 $W(s)$ 是高斯过程且

$$\mathbb{E}W(t) = 0.$$

并且对于 $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \cos^2\theta\mathbb{E}(X(t)X(s)) + \cos\theta\sin\theta\left(\mathbb{E}X(t)Y(s) + \mathbb{E}Y(t)X(s)\right) + \sin^2\theta\mathbb{E}(Y(t)Y(s)) \\ &= \cos^2\theta s + \sin^2 s = s.\end{aligned}$$

从而 $W(t)$ 是标准布朗运动。 □

【题目 2】 对于标准布朗运动 $\{B(t)\}$，在条件 $B(1) = 0$ 下

1. 计算 $\{B(t)|B(1) = 0\}$ 的数学期望和协方差函数
2. 验证 $\{B(t)|B(1) = 0\}$ 是正态过程
3. 验证 $\{B(t)|B(1) = 0\}$ 是布朗桥

Proof. $\forall\, t > 0$，我们首先考虑在条件 $B(t) = B$ 下 $\{B(s)\}_{0<s<t}$ 的分布:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B(s) \leq x|B(t) = B) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{P}(B(s) \leq x, B < B(t) < B+\varepsilon)}{\mathbb{P}(B < B(t) < B+\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{P}(B(s) \leq x, B - B(s) < B(t) - B(s) < B - B(s) + \varepsilon)}{\mathbb{P}(B < B(t) < B+\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{B-u}^{B-u+\varepsilon}\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\exp\left(-\frac{v^2}{2(t-s)} - \frac{u^2}{2s}\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u}{\int_{B}^{B+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)\mathrm{d}u}\end{aligned}$$

对 x 求导得到密度函数为

$$\begin{aligned}f_{s|t}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t-s)/t}}\exp\left(-\frac{(B-u)^2}{2(t-s)} - \frac{u^2}{2s} + \frac{B^2}{2t}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t-s)/t}}\exp\left(-\frac{(x - Bs/t)^2}{2s(t-s)/t}\right)\end{aligned}$$

即

$$B(s)|B(t)=B\sim\mathcal{N}\left(\frac{Bs}{t},\frac{s(t-s)}{t}\right)$$

从而

$$\mathbb{E}(B(t)|B(1)=0)=0$$

且 $\{B(t)|B(1)=0\}$ 是正态过程。

下面计算 $\{B(t)|B(1)=0\}$ 的协方差函数。设 $0\leq s\leq t$，则

$$\mathrm{Cov}(B(s)|B(1)=0,B(t)|B(1)=0)=\mathbb{E}(B(s)B(t)|B(1)=0)$$

利用全概率公式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B(s)B(t)|B(1)=0)&=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(B(s)B(t)\middle|B(t),B(1)=0\right)\middle|E(0)=1\right)\\&=\mathbb{E}\left(B(t)\mathbb{E}\left(B(s)\middle|B(t),B(1)=0\right)\middle|E(0)=1\right)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(B(s)\leq x|B(t)=a,B(1)=0\right)\\=&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbb{P}\left(B(s)\leq x,a<B(t)<\varepsilon+a,0<B(1)<\varepsilon\right)}{\mathbb{P}(a<B(t)<\varepsilon+a,0<B(1)<\varepsilon)}\\=&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbb{P}(B(s)\leq x,a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s),-a<B(1)<\varepsilon-a)}{\mathbb{P}(a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s),-a<B(1)<\varepsilon-a)}\\=&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbb{P}(B(s)\leq x,a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s))\mathbb{P}(-a<B(1)<\varepsilon-a)}{\mathbb{P}(a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s))\mathbb{P}(-a<B(1)<\varepsilon-a)}\\=&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbb{P}(B(s)\leq x,a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s))}{\mathbb{P}(a-B(s)<B(t)-B(s)<\varepsilon+a-B(s))}\\=&\mathbb{P}\left(B(s)\leq x|B(t)=a\right)\end{aligned}$$

故

$$\mathbb{E}\left(B(s)\middle|B(t),B(1)=0\right)=\mathbb{E}\left(B(s)\middle|B(t)0\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B(s)B(t)|B(1)=0)&=\mathbb{E}\left(B(t)\mathbb{E}\left(B(s)\middle|B(t)\right)\middle|E(0)=1\right)\\&=\frac{s}{t}\mathbb{E}\left(B(t)^2|E(0)=1\right)=\frac{s}{t}\cdot\frac{t(1-t)}{1}=s(1-t).\end{aligned}$$

故 $\{B(t)|B(1)=0\}$ 是布朗桥. □

【题目 3】 对于布朗桥 $\{X(t)\}_{0\leq t\leq 1}$，验证

$$W(t)=(t+1)X\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

是标准的布朗运动。

Proof. 由于 $X(t)$ 是布朗桥，故

$$X(t)=B(t)-tB(1),\qquad t\in[0,1]$$

其中 $B(t)$ 是标准的布朗运动，故

$$W(t)=(t+1)\left(B\left(\frac{t}{t+1}\right)-\frac{t}{t+1}B(1)\right)=(t+1)B\left(\frac{t}{t+1}\right)-tB(1).$$

由于 $B(s) \sim \mathcal{N}(0,s)$，故

$$(t+1)B\left(\frac{t}{t+1}\right) \sim N(0,t(t+1)), \qquad tB(1) \sim \mathcal{N}(0,t^2).$$

进一步

$$W(t) \sim N(0,t).$$

另一方面，对于 $0 \le s \le t$

$$\mathbb{E}W(s)W(t) = (t+1)(s+1)\mathbb{E}X\left(\frac{s}{1+s}\right)X\left(\frac{t}{1+t}\right) = (t+1)(s+1)\frac{s}{1+s}\cdot\frac{1}{1+t} = s.$$

从而 $W(t)$ 是标准的布朗运动。 □

【题目 4】 设 X 有连续的分布函数 $F(y), X_1, \cdots, X_n$ 来自总体 X。定义 $Y_i = F(X_i)$

1. 计算 Y_i 的分布函数 $G(y)$
2. 写出基于随机变量 $\{Y_i\}$ 经验函数 $G_n(y)$
3. 计算经验过程 $\{D_n(t)\} = \{\sqrt{n}\,(G_n(t) - G(t))\}$ 的协方差函数。

Solution.

1. 对于单调递增右连续的函数 $F(y)$ 而言，定义其广义逆为

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \ge y\},$$

那么

$$\omega \in (F(X) \le y) \Longleftrightarrow \omega \in (X \le F^{-1}(y))$$

故若 $y \in [0,1]$ 则

$$G_i(y) = \mathbb{P}(F(X_i) \le y) = \mathbb{P}(X_i \le F^{-1}(y)) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$$

若 $y > 1$，则

$$G_i(y) = 1;$$

若 $y < 0$，则

$$G_i(y) = 0.$$

从而

$$G_i(y) = y \cdot \chi_{[0,1]}(y).$$

2. 经验分布函数为

$$G_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_{(Y_i \le y)}$$

3. 由于

$$\mathbb{E}\chi_{(Y_i \le y)} = \mathbb{P}(Y_i \le y) = y = G(y)$$

从而

$$\mathbb{E}(G_n(t) - G(n)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\chi_{(Y_j \le y)} - G(y) = 0.$$

协方差函数为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(D_n(s), D_n(t)) &= n\mathrm{Cov}\left(G_n(s) - G_n, G_n(t) - G(t)\right) = n\mathrm{Cov}\left(G_n(s), G_n(t)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i,j}\left(\mathbb{E}\left(\chi_{Y_i \le s, Y_j \le t}\right) - \mathbb{E}\chi_{(Y_j \le s)}\mathbb{E}\chi_{(Y_j \le t)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_{(Y_j \le s)} - st = s(1-t)\end{aligned}$$

□