随机过程第一次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 12 月 13 日

【题目 1】 对于强度为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t)\}$，用 $N(t-)$ 表示区间 $[0,t)$ 内事件发生的个数，则

1. $N(t) - N(t-) = 0$ a.s.
2. $N[s,t] = N(t) - N(s-)$ 是闭区间 $[s,t]$ 内发生的事件数
3. $N[s,t] = N(s,t]$ a.s.

Proof.

1. 注意到
$$[0,t) = \lim_{n\to\infty} \left[0, t - \frac{1}{n}\right]$$
因此由概率的从上连续性有
$$\mathbb{P}(N(t) - N(t-) = 0) = \lim_{n\to\infty} \left(N(t) - N\left(t - \frac{1}{n}\right) = 0\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda/n} = 0.$$
即 $N(t) - N(t-) = 0$ a.s. 成立。
2. 由于 $N(t)$ 是 $[0,t]$ 内发生的事件数，$N(s-)$ 是 $[0,s)$ 内发生的事件数，从而 $N[s,t]$ 是
$$[0,t] \setminus [0,s) = [s,t]$$
内发生的事件数。
3. 这是因为
$$\mathbb{P}(N[s,t] = N(s,t]) = \mathbb{P}(N(t) - N(s-) = N(t) - N(s)) = \mathbb{P}(N(s) - N(s-) = 0) = 0.$$

□

【题目 2】 求 $S_{N(t)}$ 和 $S_{N(t)+1}$ 的分布。

Solution. 注意到

$$S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}.$$

因此若 $u < t$ 则

$$\mathbb{P}(S_{N(t)} \le u) = \mathbb{P}(N(t,u] = 0) = e^{-\lambda(u-t)}$$

若 $u \ge t$ 则

$$\mathbb{P}(S_{N(t)} \le u) = 1$$

从而 $S_{N(t)}$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(u-t)} & u < t \\ 1 & u \ge t \end{cases}$$

对于 $S_{N(t)+1}$，若 $u \ge t$

$$\mathbb{P}(S_{N(t)+1} > u) = \mathbb{P}(N(t,u] = 0) = e^{-\lambda(u-t)}$$

从而 $S_{N(t)+1}$ 的分布函数为

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(u-t)} & u \ge t \\ 0 & u < t \end{cases}$$

□

【题目 3】 设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是相互独立的、强度分别为 λ_1, λ_2 的 Poisson 过程。

1. 求 $N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$ 的均值函数、相关函数和特征函数
2. 判断 $N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$ 是否为 Poisson 过程。

Solution.

1. 均值函数：

$$m(t) = \mathbb{E}N_0(t) = \mathbb{E}N_1(t) - \mathbb{E}N_2(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)t.$$

相关函数：

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left(N_0(t_1)N_0(t_2)\right) \\ &= \mathbb{E}N_1(t_1)N_1(t_2) - \mathbb{E}N_1(t_1)N_2(t_2) - \mathbb{E}N_1(t_2)N_2(t_1) + \mathbb{E}N_2(t_1)N_2(t_2) \\ &= \mathbb{E}N_1(t_1)N_1(t_2) + \mathbb{E}N_2(t_1)N_2(t_2) - 2\lambda_1\lambda_2 t_1 t_2 \\ &= \lambda_1^2 t_1 t_2 + \lambda_2^2 t_1 t_2 - 2\lambda_1\lambda_2 t_1 t_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\min(t_1, t_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 t_1 t_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\min(t_1, t_2). \end{aligned}$$

特征函数：

$$\phi(s) = \mathbb{E}e^{isN_0(t)} = \mathbb{E}e^{isN_1(t)}e^{-isN_2(t)} = e^{t\lambda_1(e^{is}-1)} \cdot e^{t\lambda_2(-e^{is}-1)}$$

2.

$$N_0(0) = N_1(0) - N_2(0) = 0$$

任给 $0 < s < t < r$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(N_0(r) - N_0(t))(N_0(t) - N_0(r)) \\
=&\mathbb{E}\left((N_1(r) - N_1(t)) - (N_2(r) - N_2(t))\right)\left((N_1(t) - N_1(s)) - (N_2(t) - N_2(s))\right) \\
=&\left(\mathbb{E}(N_1(r) - N_1(t)) - \mathbb{E}(N_2(r) - N_2(t))\right)\left(\mathbb{E}(N_1(t) - N_1(s)) - \mathbb{E}(N_2(t) - N_2(s))\right) \\
=&\mathbb{E}(N_0(r) - N_0(t)) \cdot \mathbb{E}(N_0(t) - N_0(r))
\end{aligned}$$

从而 N_0 具有平稳增量性。由于 N_0 的特征函数为

$$\phi(s) = e^{t\lambda_1(e^{is}-1)} \cdot e^{t\lambda_2(-e^{is}-1)}$$

从而 $N_0(t)$ 不是 Poisson 过程。

□