随机过程第五次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 11 月 25 日

【题目 1】 一只蜘蛛在座钟的 12 个数字上做随机游动，每次以概率 p 顺时针走一步，以概率 q 逆时针走一步，用 X_n 表示 n 时蜘蛛的位置.

1. 说明 $\{X_n\}$ 是马氏链，写出转移概率，计算平稳不变分布；
2. 给出 $\{X_n\}$ 存在可逆分布的条件，求可逆分布.

Solution.

1. 由于

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i|X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)\\
=&\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = i - j|X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)\\
=&\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = i - j|X_n = j)\\
=&\mathbb{P}(X_{n+1} = i|X_n = j).
\end{aligned}$$

因此 $\{X_n\}$ 是一个马氏链。且

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & i - j \equiv -1(\text{mod } 12) \\ q, & i - j \equiv -1(\text{mod } 12) \end{cases}$$

即

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & & & \cdots & 0 & q \\ q & & p & & \cdots & & \\ & q & & p & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p & 0 & & & & q & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_{12})$，利用

$$\pi = \pi P, \qquad \sum_{1\le i\le 12} \pi_i = 1.$$

解得

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \cdots & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

2. 若 $\{X_n\}$ 存在可逆分布，那么

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = q \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = q = \frac{1}{2}.$$

这时可逆分布即为

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \cdots & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

□

【题目 2】 对于分支过程计算灭绝概率 ρ_0。其中

$$p_0 = 0.2, \qquad p_1 = 0.3, \qquad p_2 = 0.5.$$

Solution. 由于

$$F(\rho) = \sum_{k\geq 0} p_k \rho^k = 0.2 + 0.3\rho + 0.5\rho^2.$$

因此由

$$F'(1) = 0.3 + 2 \times 0.5 > 1$$

知 $\rho = F(\rho)$ 在 $(0, 1)$ 上有唯一解 ρ_0 即

$$5\rho_0^2 - 7\rho_0 + 2 = 0.$$

解得 $\rho_0 = 2/5$。 □

【题目 3】 设 $\xi \in \mathcal{B}(2, p)$，分支过程中每个粒子分裂成后代数是来自 ξ 的随机变量。当 $X_0 = 1$ 时，计算

1. 群体灭绝的概率
2. 群体在第二代灭绝的概率
3. 若 $X_0 \sim P(\mu)$，$p > 0.5$，计算群体最终灭绝的概率。

Solution.

1. 记 $q = 1 - p$，ρ_0 为 $X_0 = 1$ 时群体灭绝概率则

$$F(\rho) = q^2 + 2pq\rho + p^2\rho^2.$$

由于

$$F'(1) = 2pq + 2p^2 = 2p.$$

从而当 $p \leq 1/2$ 时 $\rho_0 = 1$. 当 $p > 1/2$ 时 ρ_0 为方程 $F(\rho) = \rho$ 在 $(0, 1)$ 上的唯一解，解得 $\rho_0 = q^2/p^2$.

2. 直接计算有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{群体在第 2 代灭绝}|X_0 = 1) &= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(\text{群体在第 2 代灭绝}|X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = 1) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(\text{群体在第 2 代灭绝}|X_1 = 1)^k \cdot \mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = 1) \\
&= q^2 \cdot 2pq + q^4 \cdot p^2 \\
&= pq^3(2 + pq).
\end{aligned}$$

3. 直接计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{群体灭绝}) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\text{群体灭绝}|X_0 = k) \cdot \mathbb{P}(X_0 = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\text{群体灭绝}|X_0 = 1)^k \cdot \mathbb{P}(X_0 = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \rho_0^k \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\
&= \exp(-\mu + \rho_0\mu) \\
&= \exp\left(-\mu\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

【题目 4】 一个 t 时刻存活的生物在 $(t, t+h]$ 内寿终的概率是 $\lambda h + o(h)$，计算这个生物寿命的生存函数。

Solution. 设生物寿命为 Y，并记 $g(t) = \mathbb{P}(Y > t)$。那么

$$\mathbb{P}\left(t < Y \le t+h | Y > t\right) = \frac{\mathbb{P}(t < Y \le t+h)}{\mathbb{P}(Y > t)} = \frac{g(t) - g(t+h)}{g(t)} = \lambda h + o(h).$$

这将导致

$$\frac{g(t) - g(t+h)}{h} = g(t)\left(\lambda + o(1)\right).$$

令 $h \to 0^+$ 有

$$-g'(t) = \lambda g(t), \qquad g(0) = 1.$$

解这个微分方程得

$$g(t) = \exp(-\lambda t).$$

从而生存函数为

$$\mathbb{P}(Y \le t) = 1 - g(t) = 1 - \exp\left(-\lambda t\right).$$

□

【题目 5】 t 时刻有 m 个独立存活的生物，每个生物在长为 h 的时间内寿终的概率是 $\lambda h + o(h)$。从 t 时刻开始，用 T_m 表示最早寿终的生物的寿终时间，求 T_m 的分布。

Solution. 记第 i 个个体的寿终时间为 $Y_i\ (1 \le i \le m)$，那么由上题的结论知

$$\mathbb{P}(T_m \ge t) = \mathbb{P}(Y_i \ge t\ \forall\ i = 1, 2, \cdots m) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(Y_i \ge t) = \exp\left(-m\lambda t\right).$$

从而 $T_m \sim \mathcal{E}(m\lambda)$. □

【题目 6】 短信按照强度为 λ 的 Poisson 流到达一部手机。每个短信是公事的概率为 p，是私事的概率是 $q = 1-p$。引入

$$X(t) = \begin{cases} 0, & (0,t]\text{中最后一个短信是公事} \\ 1, & (0,t]\text{中最后一个短信是私事} \end{cases}$$

说明 $\{X(t)\}$ 是马氏链，写出转移速率矩阵和嵌入链的转移概率矩阵。

Solution. 记 $\{N(t)\}, \{M(t)\}$ 分别为 $(0,t]$ 内短信是公事和私事的次数，那么 $N(t), M(t)$ 分别是强度为 $\lambda p, \lambda q$ 的、相互独立的 Poisson 流。因此由 Poisson 的独立增量性和平稳增量性知 $\{X(t)\}$ 是一个马氏链。并且当 $h \to 0^+$ 时有

$$p_{00}(h) = \mathbb{P}(X(t+h) = 0 | X(t) = 0) = \mathbb{P}(M(h) = 0) = 1 - \lambda q h + o(h)$$

$$p_{01}(h) = \mathbb{P}\left(X(t+h) = 1 | X(t) = 0\right) = \mathbb{P}(M(h) = 1) = \lambda q h + o(h)$$

$$p_{10}(h) = \mathbb{P}(X(t+h) = 0 | X(t) = 1) = \mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda p h + o(h)$$

$$p_{11}(h) = \mathbb{P}(X(t+h) = 1 | X(t) = 1) = \mathbb{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda p h + o(h).$$

综上，我们可以得到 p_{ij} 在 0 处的导数，即转移速率矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda q & \lambda q \\ \lambda p & -\lambda p \end{pmatrix}.$$

嵌入链的转移速率矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \lambda q / \lambda q \\ \lambda p / \lambda p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

【题目 7】 人群中有若干人带菌. 在任何长为 h 的时间内群体中恰有两个人相遇的概率是 $\lambda h + o(h)$，有更多人次相遇的概率为 $o(h)$. 相遇时以概率 p 发生传染，被传染者将永远带菌. 用 $X(t)$ 表示 t 时带菌的人数，回答以下问题:

1. $\{X(t)\}$ 是马氏链吗?
2. 如果是马氏链，请写出转移速率矩阵 Q
3. 从 t 时刻开始，新传染上 n 个人平均需要多少时间

Solution.

1. 由于群体中两人相遇的过程相互独立，且发生感染也相互独立，因此 $\{X(t)\}$ 是马氏链。
2. 设人群有 m 个人。在 h 时间内，由于有两人相遇的概率为 $\lambda h + o(h)$，更多人相遇的概率为 $o(h)$，因此没人相遇的概率为 $1 - \lambda h + o(h)$。

   我们考察当 h 充分小时 $p_{ij}(h)$ 的情况。首先显然有 $p_{00} = 1$, $p_{0,j} = 0\,(j \geq 1)$。对于 $1 \leq i < m$ 的情况

   $$p_{ii} = 1 - \lambda h + (1-p)\lambda h + o(h), \qquad p_{i,i+1} = p\lambda h + o(h), \qquad p_{1j} = o(h)\text{ (otherwise)}$$

   并且 p_{mm} 因此

   $$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & & \cdots & 0 & 0 \\ & -p\lambda & p\lambda & & \cdots & 0 & 0 \\ & & -p\lambda & p\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda p & \lambda p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 由于 T_i 服从参数为 $q_i = |q_{ii}|$ 的指数分布，因此新染上 n 个人平均需要的时间为

   $$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \frac{n}{\lambda p}.$$

□

【题目 8】 线性生灭过程的嵌入链是离散时间分支过程，且

$$p_0 = k_{10} = \mu/(\lambda+\mu), \qquad p_2 = k_{12} = \lambda/(\lambda+\mu).$$

计算 $\rho_0 = \mathbb{P}(\text{群体灭绝}|X_0 = 1)$。

Solution. 定义函数

$$F(\rho) = \sum_{k\geq 0} p_k \rho^k = \frac{\mu + \lambda\rho^2}{\lambda+\mu}$$

那么

$$F'(1) = \frac{2\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{2}{1+\mu/\lambda}.$$

因此若 $\mu \geq \lambda$，则 $F'(1) \leq 1$ 从而 $\rho_0 = 1$。若 $\mu < \lambda$，则 $F'(1) > 1$，故 $\rho = F(\rho)$ 在 $(0,1)$ 上由唯一解 ρ_0，即 ρ_0 满足

$$\rho^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\cdot\rho + \mu = 0.$$

解得 $\rho_0 = \mu/\lambda$. □