随机过程第四次作业

应数 2101　杨嘉昱　2216113458

2024 年 11 月 5 日

【题目 1】 用定理 1.2 的 (1)(2) 证明 (3)(4).

Proof. 由于在 $X_n = i$ 的情况下，将来与过去独立，故直接计算得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0) \\
=&\frac{\mathbb{P}(X_{n+k} = j, X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0)} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X_{n+k} = j, X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0)} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X_{n+k} = j, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0 | X_n = i)}{\mathbb{P}(X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0 | X_n = i)} \\
=&\frac{\mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_n = i) \cdot \mathbb{P}(, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0 | X_n = i)}{\mathbb{P}(X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0 | X_n = i)} \\
=&\mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_n = i) \\
=&\mathbb{P}(X_k = j | X_0 = i)
\end{aligned}
$$

利用这个结果立即得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+k} \in A | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0) &= \sum_{j \in A} \mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1} \cdots X_0 \in A_0) \\
&= \sum_{j \in A} \mathbb{P}(X_k = j | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_k \in A | X_0 = i)
\end{aligned}
$$

□

【题目 2】 设 X 是取整数值的随机变量，$X_0, X_1 . \cdots$ 是来自总体 X 的样本，证明部分和 $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ 是马氏链。

Proof. $\forall\, i, j, i_0, i_1, \cdots i_{n-1} \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = j | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, S_0 = i_0) \\
=&\mathbb{P}(X_{n+1} = j - S_n | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, S_0 = i_0) \\
=&\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i | S_n = i) = \mathbb{P}(S_{n+1} = j | S_n = i)
\end{aligned}
$$

从而 $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ 是马氏链。 □