

XJTU 2022 高等代数与几何 (I) 期中试题 (回忆版)

排版: Jiann

【题目 1】 计算题

1. 求过直线

$$l: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

且与平面

$$\pi: 2x + y - z + 1 = 0$$

垂直的平面方程。

2. 求顶点为原点, 准线方程为

$$\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

的锥面方程。

3. n 阶三对角矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$(a) \quad a_{ii} = 2, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(b) \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

计算 A 的行列式。

【题目 2】 写出并推导几何空间中点 $P(x, y, z)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式。

【题目 3】

1. 写出将二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

化简为标准方程的简要过程。

2. 写出 17 种标准方程的基本形式以及对应的集合图形。

3. 将曲面方程 $2xy - z + 1 = 0$ 化为标准方程, 并判断其类型。

【题目 4】

1. 写出正交变换的定义；
2. 证明：正交变换要么是刚体运动，要么是刚体运动与反射的乘积；
3. 正交变换 $\tau : P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z')$ 的公式由

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ z' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

给出。判断： τ 是否为刚体运动？若不是，将其分解为刚体运动和反射的乘积。

【题目 5】

1. 写出 Cramer 法则；
2. 写出 Cramer 法则在几何空间中的两种不同解释。

【题目 6】 附加题。

根据上题中对于 Cramer 法则的一种几何解读和 a, b 的取值，分析实数域上三元线性方程组

$$\begin{cases} ax - 2y + 2z = 2 \\ -x + ay = 1 \\ x - y + z = b \end{cases}$$

的解的所有可能情况。（若非基于几何知识则不得分）