常微分方程

作者：杨嘉昱

最后编辑时间：2024 年 8 月 26 日

西安交通大学数学与统计学院

目录

Chapter 1

引论

1.1 解的存在唯一性

讨论初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.1}$$

解的存在唯一性.

【定义 1.1】 设 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

连续，如果存在 $L > 0$，使得 $\forall\,(x,y_1),(x,y_2) \in R$ 都有

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

则称 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足Lipschiz 条件，L 称为Lipschiz 常数.

【定理 1.2】 若 $f(x,y)$ 在 R 上连续，且关于 y 满足 Lipschiz 条件，则初值问题 (1.1) 在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上存在唯一的解，其中

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \qquad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

证明. 仅证明 $[x_0, x_0 + h]$ 上存在且唯一，$[x_0 - h, x_0]$ 同理可证.

1. 等价的积分方程，对 (1.1) 两侧同时积分得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

2. 构造迭代函数列. 取 $\varphi_0(x) = y_0$，得到

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\,\mathrm{d}s$$

$\varphi_1(x)$ 也是连续函数，如果 $\varphi_1(x)=\varphi_0(x)$，则 $\varphi_0(x)$ 就是积分方程的解. 否则又把 $\varphi_1(x)$ 带入得

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_1(s))\,\mathrm{d}s$$

重复这个过程就有

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s$$

3. 迭代函数列的收敛性.

首先来证明对任意的 n 和 $x\in[x_0,x_0+h]$，$\varphi_n(x)$ 连续且满足

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b \tag{1.2}$$

显然 $\varphi_0(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上有定义、连续且满足式 (1.2). 设 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上有定义、且满足式 (1.2)，那么 $\varphi_{n+1}(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上有定义，且

$$|\varphi_{n+1}(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi_n(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b$$

因此由数学归纳法原理知命题成立.

接下来证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上一致收敛.

考虑函数项级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)),\qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{1.3}$$

则其 $n+1$ 项的部分和为

$$S_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))=\varphi_n(x)$$

先对每一项进行估计

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)|\,\mathrm{d}s\leqslant M(x-x_0)$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi_1(x))-f(s,\varphi_0(x))|\,\mathrm{d}s\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,\mathrm{d}s\\&\leqslant LM\int_{x_0}^{x}(s-x_0)\,\mathrm{d}s=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2\end{aligned}$$

由数学归纳法易得，对于任意的 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n\leqslant\frac{ML^{n-1}h^k}{n!},\qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

由于正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$，因此由 Weierstrass 判别法知函数项级数 (1.3) 在 x_0,x_0+h 上一致收敛.

4. 序列的极限函数就是方程 (1.1) 的连续解. 由于 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致连续，令

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$$

那么由 $\varphi_n(x)$ 的连续性以及一致收敛性知 $\varphi(x)$ 也是 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续函数.

由 Lipschitz 条件

$$|f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi(x))| \leqslant L|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上的一致收敛性得出函数列 $\{f_n(x)\}(f_n(x) = f(x,\varphi_n(x)))$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致收敛于函数 $f(x,\varphi(x))$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s = y_0 + \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s$$

即

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

这表明 $\varphi(x)$ 是积分方程的连续解.

5. 解的唯一性. 设 $\psi(x)$ 也是 (1.1) 的一个连续解，令 $g(x) = |\psi(x) - \varphi(x)|$，则 $g(x)$ 是定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的非负连续函数. 由 Lipschitz 条件得

$$g(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant L\int_{x_0}^{x}|\psi(s) - \varphi(s)|\,\mathrm{d}s = L\int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s$$

令 $u(x) = L\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s$，那么 $u(x)$ 是定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的非负连续可微函数，且 $u(x_0) = 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant u(x)$, $u'(x) = Lg(x)$. 因此

$$u'(x) = Lg(x) \leqslant Lu(x), \qquad (u'(x) - Lu(x))e^{-Lx} \leqslant 0$$

对后一个不等式积分得

$$u(x)e^{-Lx} \leqslant u(x_0)e^{-Lx_0} = 0$$

这就说明 $g(x) \leqslant u(x) \leqslant 0$，即就是 $g(x) \equiv 0$. 即解的唯一性得证. □

CHAPTER 2

一阶微分方程

2.1 线性方程

【定义 2.1】 线性齐次方程形如

$$y' + p(x)y = 0.$$

【命题 2.2】 线性齐次方程

$$y' + p(x)y = 0$$

的通解为

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证明.

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\log y}{\mathrm{d}x} = -p(x) \\ &\Longrightarrow \quad \log y = -\int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad y = C\exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

□

【定义 2.3】 线性非齐次方程形如

$$y' + p(x)y = q(x).$$

【命题 2.4】 线性非齐次方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的通解为

$$y = \exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x\right).$$

证明. 相较于使用常数变易公式，笔者更喜欢使用积分因子。受线性齐次方程的启发，若线性齐次方程

$$y' = p(x)y = q(x)$$

可以化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mu(x)y\right) = h(x).$$

的形式，那么就可以分离变量解微分方程。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu'(x)y$$

因此对比系数有

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

故

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = q(x) \qquad &\Longrightarrow \qquad (y' + p(x))\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right) = q(x)\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\Longrightarrow \qquad \left(y \cdot \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\right)' = q(x)\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\Longrightarrow \qquad y = \exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

□

【例题 2.5】 解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

解. 注意到

$$\exp\left(\int \cos x\,\mathrm{d}x\right) = e^{\sin x}$$

因此方程两侧同时乘 $e^{\sin x}$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\sin x}\right) = \frac{1}{2}\sin 2xe^{\sin x} = \sin x\cos xe^{\sin x}$$

故

$$ye^{\sin x} = \int \sin x\cos xe^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}\left(e^{\sin x}\right) = \sin xe^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

□

【定义 2.6】(Berlnoulli 方程) 形如

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

其可化为一阶非齐次线性微分方程. 具体来说，对方程两遍同时乘 $y^{-\alpha}$ 有

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y^{1-\alpha}}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x).$$

【例题 2.7】 求解微分方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}.$$

解. 注意到
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2x}y+\frac{x}{2}\cdot y^{-1}$$
是一个 Berlnoulli 方程，因此两侧同时乘 y 有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\right)=\frac{1}{x}y^2+x$$
因此利用积分因子有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{x}\right)=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2=x^2+Cx.$$

□

2.2 变量可分离方程

【定义 2.8】 变量可分离方程形如
$$y'=f(x)g(x).$$

【命题 2.9】 变量可分离方程
$$y'=f(x)g(y)$$
的解为
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C.$$

证明.
$$\begin{aligned} y'=f(x)g(y) \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \qquad \int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C \end{aligned}$$

□

【定义 2.10】(齐次方程) 齐次方程形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$
其可以化为变量可分离方程. 事实上由于
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\cdot x\right)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$
因此有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(F\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\right).$$

【例题 2.11】 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y-1}{x-y+3}.$$

解. 令

$$x+y-1=x-y+3=0$$

解得

$$x=-1,\qquad y=2$$

因此考虑变量替换

$$x=u-1,\qquad y=v+2.$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u+v}{u-v}$$

是一个齐次方程，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{v}{u}\cdot u\right)=u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{v}{u}\right)+\frac{v}{u}=\frac{1+v/u}{1-v/u}.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}(v/u)}{\frac{1+v/u}{1-v/u}-\frac{v}{u}}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

两边积分即得。

□

2.3 全微分方程

【定义 2.12】 设 $u=F(x,y)$ 是一个连续可微的二元函数，则其全微分为

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}F(x.y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

故类似的若有函数 $F(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}F(x,y)=M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

则称

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程. 并且容易看出该微分方程的通解就是 $F(x,y)=C$.

【定理 2.13】(全微分方程的判定条件) 设微分方程为

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 在一个矩形区域 R 中连续且有连续的一阶偏导数，则该微分方程是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad \text{或者} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ M(x,y) & N(x,y) \end{vmatrix}=0.$$

证明. 必要性. 设

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

是一个全微分方程，则存在 $F(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}F(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y=M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

因此

$$M(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \qquad N(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

进而

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

由于 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$ 连续，因此

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

□

【定义 2.14】 对于微分方程

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

而言，若存在函数 $\mu(x,y)$，使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程，则称 $\mu(x,y)$ 是一个积分因子.

【定理 2.15】 微分方程

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

存在一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

仅与 x 有关.

证明. 设 $\mu(x)$ 是一个积分因子，则

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\mu\frac{\partial M}{\partial y}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=0$$

那么

$$\frac{\log\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

明所欲证. □

【例题 2.16】 求解微分方程

1. $2x(ye^{x^2}-1)\,\mathrm{d}x+e^{x^2}\,\mathrm{d}y=0$;
2. $(x\cos(x+y)+\sin(x+y))\ \mathrm{d}x+x\cos(x+y)\,\mathrm{d}y=0$;
3. $x(4y\,\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y)+y^3(3y\,\mathrm{d}x+5x\,\mathrm{d}y)=0$;
4. $(y\cos x-x\sin x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\,\mathrm{d}y=0$.

解.

1. $$y\,\mathrm{d}e^{x^2}+e^{x^2}\,\mathrm{d}y-\ \mathrm{d}x^2=\ \mathrm{d}\left(ye^{x^2}-x^2\right)=0\qquad\Longrightarrow\qquad ye^{x^2}-x^2=C.$$

2. $$x\,\mathrm{d}\left(\sin(x+y)\right)+\sin(x+y)\,\mathrm{d}x=0\qquad\Longrightarrow\qquad x\sin(x+y)=C.$$

3. 两侧乘 x^2y 得

$$\begin{aligned}4y^2x^3\,\mathrm{d}x+2x^3y\,\mathrm{d}y+3y^5x^2\,\mathrm{d}x+5x^3y^4\,\mathrm{d}y&=y^2\,\mathrm{d}x^4+x^4\,\mathrm{d}y^2+y^5\,\mathrm{d}x^3+x^3\,\mathrm{d}y^5\\&=\ \mathrm{d}\left(x^4y^2+x^3y^5\right)=0\end{aligned}$$

故

$$x^4y^2+x^3y^5=C.$$

4. 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x-(y\cos x+\cos x-x\sin x)=-M$$

因此该微分方程具有只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)$，则

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial N}=M\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=0\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\mathrm{d}\log\mu}{\mathrm{d}y}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial y}}{M}$$

解得 $\mu(y)=e^y$.

□

2.4 变量替换

【定义 2.17】(Riccati 方程) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + f(x)$$

的方程称为Riccati 方程.

【命题 2.18】 1. 当 $p(x), q(x), f(x)$ 都是常数时，Riccati 方程是变量可分离方程；

2. 当 $p(x) = 0$，Riccati 方程是线性方程

3. 当 $f(x) = 0$ 时，Riccati 方程时 Bernoulli 方程

4. 当 Riccati 方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = \frac{\ell}{x}y + \frac{b}{x^2}.$$

可令 $z = xy$，将上述方程可化为变量可分离方程.

证明. 设 Riccati 方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = \frac{\ell}{x}y + \frac{b}{x^2}$$

时，注意到有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((xy)\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x}$$

故

$$x\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x} + a(xy)^2 = (\ell+1)xy + b$$

这是一个可分离变量的微分方程. □

2.5 一阶隐式微分方程

2.5.1 可求出 x 或 y 的方程

【例题 2.19】 求解方程

$$y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

解. 设 $y' = p$，则

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \tag{2.1}$$

两边对 x 求导得

$$p = 2pp' - xp' - p + x \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 1\right)(2p - x) = 0$$

故将 p 代入式 (2.1) 有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$$

$$2p - x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{4}.$$

□

【定义 2.20】(Clairaut 方程)

$$y = xy' + \varphi(y').$$

其中 $\varphi(x)$ 二阶可微且 $\varphi''(x) \neq 0$.

证明. 令 $y' = p$，则

$$y = xp + \varphi(p) \tag{2.2}$$

两边对 x 求导得

$$p = p + xp' + \varphi'(p)p' \qquad \Longrightarrow \qquad (x + \varphi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

通解为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = C \qquad \Longrightarrow \qquad y = Cx + \varphi(C)$$

特解为

$$x + \varphi'(p) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\varphi'(p) + \varphi(p).$$

□

2.5.2 不显含 x 或 y 的方程与参数法

【例题 2.21】 解微分方程

$$x\sqrt{1 + (y')^2} = y'.$$

解. 令 $y' = \tan t$，则

$$x \sec t = \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sin t$$

故

$$\mathrm{d}y = \tan t\,\mathrm{d}x = \tan t\,\mathrm{d}\left(\sin t\right) = \sin t\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\cos t + C$$

□

Chapter 3

二阶以及高阶微分方程

3.1 可降阶的高阶方程

【例题 3.1】 求解微分方程

$$xx'' = (x')^2.$$

<u>解.</u> 利用变量替换

$$x'' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}x'$$

故

$$xx'' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}x'x = (x')^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x'\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}x - x'\right) = 0.$$

因此

$$x' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = C$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}x - x' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x' = C_1 x \qquad \Longrightarrow \qquad x = C_2 e^{C_1 x}.$$

□

【定理 3.2】**(Liouville 公式)** 设 $x_1(t), \cdots x_n(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n(t)x = 0$$

的任意 n 个解，$W(t)$ 是其的 Wronskian 行列式，则

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad \forall\, t_0 \in (a,b).$$

<u>**证明.**</u> 设 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 的 Wronskian 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

则

$$W'(t)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(j)}(t) & \cdots & x_n^{(j)}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t)\end{vmatrix}$$

又注意到 $\forall\, j : 1\le j\le n$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0$$

因此代入有

$$W'(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1(t)x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & -a_1(t)x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}=-a_1(t)W(t)$$

这是一个可分离变量的微分方程，因此有

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\,\mathrm{d}s\right),\qquad \forall\, t_0\in(a,b).$$

□

【推论 3.3】 已知二阶微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0$$

的一个解为 $x_1(t)$，则方程的通解为

$$x=C_1x_1+C_2\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t.$$

证明. 设 $W(t_0)=C$，$x(t)$ 是原方程与 $x_1(t)$ 不同的解. 则由 Liouville 公式有

$$\begin{aligned}W'(t)=x_1x'-x_1'x=C\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\quad&\Longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{x_1}\right)=\frac{C}{x_1^2}\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\\&\Longrightarrow\quad x=C_1x_1+C_2\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

3.2 线性齐次常系数方程

【命题 3.4】(常系数齐次线性方程)

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0.$$

令

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

它在复数域上有 n 个根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。

1. 若 λ_j 是实单特征根，则对应的解为
$$e^{\lambda_j x}.$$
2. 若 $\lambda_j = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 是复单特征根，则对应的解为
$$e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$
3. 若 λ_j 是实 k 重特征根，则对应的解为
$$e^{\lambda_j}, te^{\lambda_j}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_j}.$$
4. 若 $\lambda_j = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 是复 k 重特征根，则对应的解为
$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

【命题 3.5】(Euler 方程)
$$t^n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0.$$
作变量替换 $t = e^u$ 则可以将其化为常系数线性方程。

【例题 3.6】 解微分方程
$$t^2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0.$$

解. 作变量替换 $t = e^u$，那么
$$u = \log|t|.$$
从而
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$$
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right).\end{aligned}$$
从而原方程可以化为
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + x = 0$$
特征根为
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$
故解为
$$x = (C_1 + C_2 u)e^u = (C_1 + C_2\log|t|)t.$$
□

3.3 线性非齐次常系数方程

【命题 3.7】
$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0 = f(t).$$

CHAPTER 4

微分方程组

4.1 矩阵指数函数

【定义 4.1】(矩阵指数函数) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 的常数矩阵，定义矩阵指数 $\exp\left(\boldsymbol{A}\right)$ 为

$$\exp\left(\boldsymbol{A}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n.$$

进一步定义矩阵指数函数 $\exp\left(\boldsymbol{A}t\right)$ 为

$$\exp\left(\boldsymbol{A}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{A}t\right)^n.$$

【注 4.2】 由于 $\forall\, k\in\mathbb{Z}$ 有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{A}^n}{n!}\right\|\leq\frac{\|\boldsymbol{A}\|^n}{n!}$$

而数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\boldsymbol{A}\|^n}{n!}$$

收敛，因此 $\exp\left(\boldsymbol{A}\right)$ 也收敛. 同理，$\exp\left(\boldsymbol{A}t\right)$ 在任意有界闭区间上是一致收敛的.

【命题 4.3】 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换，那么

$$\exp\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\exp\left(\boldsymbol{A}\right)\exp\left(\boldsymbol{B}\right).$$

证明. 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，那么一方面

$$\exp\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{E}+\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)+\frac{1}{2!}\left(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2\right)+\cdots$$

另一方面

$$\begin{aligned}\exp\left(\boldsymbol{A}\right)\exp\left(\boldsymbol{B}\right)&=\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}+\cdots\right)\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{E}+\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)+\frac{1}{2!}\left(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2\right)+\cdots=\exp\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\end{aligned}$$

□

【命题 4.4】 对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$(\exp(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 存在且

$$(\exp(\boldsymbol{A}))^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A}).$$

<u>**证明.**</u> 注意到 $\boldsymbol{A}$ 和 $-\boldsymbol{A}$ 可交换，因此

$$\exp(\boldsymbol{A})\exp(-\boldsymbol{A})=\exp(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})=\exp(\boldsymbol{O})=\boldsymbol{E}$$

即 $(\exp(\boldsymbol{A}))^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$. □

【命题 4.5】 若 $\boldsymbol{T}$ 可逆，则

$$\exp\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)=\boldsymbol{T}^{-1}\exp(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}.$$

<u>**证明.**</u> 直接计算可得. □

【定理 4.6】 矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的一个基解矩阵且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.

<u>**证明.**</u> 由于 $t=0$ 时

$$\exp(\boldsymbol{A}\cdot 0)=\boldsymbol{E}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}\cdot 0)^n}{n!}=\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$. 又由于

$$(\exp(\boldsymbol{A}t))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!}=\boldsymbol{A}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^n t^n}{n!}=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)$$

因此 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是原微分方程组的解矩阵，又由于 $\det\boldsymbol{\Phi}(0)=1\neq 0$，因此 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 是原微分方程组的基解矩阵. □

【命题 4.7】 由于对任意一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}.$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型。

以 3 阶矩阵为例。

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，那么其 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

2. 若其不可对角化，那么必然存在一个特征值，使得其几何重数小于代数重数。

   (a) 若有一个二重特征值 λ，另一个特征值为 μ。且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 1，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

   (b) 若有三重特征值 λ，且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 1，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

   (c) 若有三重特征值 λ，且属于特征值 λ 的特征空间

   $$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

   的维数为 2，那么其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的解是 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 因此现在来看如何得到 $\exp(\boldsymbol{A}t)$。

1. 若其 Jordan 标准型为

   $$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

   那么

   $$\exp(\boldsymbol{A}t) = \boldsymbol{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\boldsymbol{J}t)^k\right)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}.$$

2. 若其不可对角化，不妨设其 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \mu\end{pmatrix}$$

这是一个分块对角矩阵，因此先看 $\boldsymbol{J}_1$。注意到

$$\boldsymbol{J}_1=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

是一个幂零矩阵，即

$$\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{O}.$$

从而

$$\begin{aligned}\exp\left(\boldsymbol{J}_1 t\right)&=\exp\left(\lambda\boldsymbol{I}t+\boldsymbol{H}t\right)=\exp\left(\lambda\boldsymbol{I}t\right)\cdot\exp\left(\boldsymbol{H}t\right)=e^{\lambda t}\cdot\exp\left(\boldsymbol{H}\right)\\ &=e^{\lambda t}\cdot\left(I+t\boldsymbol{H}+\frac{1}{2!}(t\boldsymbol{H})^2+\cdots\right)=e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix}1 & t\\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

从而

$$\exp\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{t}\right)=\begin{pmatrix}\exp\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{t}_1\right) & \\ & e^{\mu t}\end{pmatrix}$$

进而

$$\exp\left(\boldsymbol{A}t\right)=\boldsymbol{P}^{-1}\exp\left(\boldsymbol{J}t\right)\boldsymbol{P}.$$

4.2 微分方程组的解法

【例题 4.8】(消元法) 求解微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=3y_1-2y_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=2y_1-y_2.\end{cases}$$

<u>**解.**</u> 由第二个方程知

$$y_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}+y_2\right)$$

两侧求导得

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\right).$$

将第一个方程代入得

$$\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}+y_2=0$$

解得

$$y_2=(C_1+C_2x)e^x.$$

从而

$$y_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}+y_2\right)=\frac{1}{2}\left(2C_1+C_2+2C_2x\right)e^x.$$

□

【定义 4.9】(微分算子) 记

$$\mathrm{D}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad D^kx=\frac{\mathrm{d}^kx}{\mathrm{d}t^k}$$

那么定义算子多项式

$$L=\mathrm{D}^n+a_1\mathrm{D}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\mathrm{D}+a_n.$$

$$Lx=(\mathrm{D}^n+a_1\mathrm{D}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\mathrm{D}+a_n)x=\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0.$$

【例题 4.10】(算子法) 解微分方程组

$$\begin{cases}2\dot{x_1}-2\dot{x_2}-3x_1=t,\\ 2\dot{x_1}+2\dot{x_2}+3x_1+8x_2=2.\end{cases}$$

解. 记

$$L_1=2\mathrm{D}-3,L_2=-2\mathrm{D},L_3=2\mathrm{D}+3,L_4=2\mathrm{D}+8,f(t)=t,g(t)=2.$$

那么原方程化为

$$L_1x_1+L_2x_2=t,\qquad L_3x_1+L_4x_2=2.$$

从而给两式分别作用 L_3 和 L_1 有

$$L_1L_3x_1+L_2L_3x_2=L_3t=3t+2$$

$$L_1L_3x_1+L_1L_4x_2=L_1(2)=-6$$

两式相减得

$$(L_2L_3-L_1L_4)x^2=3t+2+6$$

即

$$x_2''+2x_2'-3x_2=-1-\frac{3}{8}t$$

解得

$$x_2=C_1e^t+C_2e^{-3t}+\frac{t}{8}+\frac{5}{12}.$$

$$2x_1'-3x_1=t+\frac{1}{4}+2C_1e^t-6C_2e^{-2t}.$$

解得

$$x_1=-\frac{t}{3}-\frac{11}{36}-2C_1e^t+\frac{2}{3}C_2e^{-3t}+C_3e^{3t/2}$$

将其带入第二个方程中有 $C_3=0$. □

【命题 4.11】(线性变换法) 设

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准型 J，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$$

因此令

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

那么

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(t)$$

若 $\boldsymbol{J}$ 是一个对角矩阵，那么每个方程都形如

$$y_i' = \lambda_i y_i + f_i(t).$$

是一个一阶线性微分方程。

CHAPTER 5

非线性微分方程组

5.1 基本概念

【定义 5.1】 系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

的常数解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 称为系统的奇点. 常数解 $\boldsymbol{x}^*$ 满足

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}^*)=0.$$

若系统 (5.1) 的某个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 满足

$$\boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t),\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

其中 $T>0$ 为一个常数，则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 (5.1) 的一个周期解.

【定义 5.2】 设 (5.1) 右端函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 对于 $\boldsymbol{x}\in G\subseteq\mathbb{R}^n$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 连续，关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschiz 条件且 (5.1) 有一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 定义于 $t_0\leqslant t<+\infty$ 以及 $\boldsymbol{\Phi}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}_0$.

【定义 5.3】 若 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于任意满足 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 有

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\Phi}_0\|<\delta\qquad\Longrightarrow\qquad\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\Phi}(t)\|<\varepsilon,\qquad\forall\, t\geqslant t_0$$

则称方程 (5.1) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是Lyapunov 稳定的，简称稳定.

若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是稳定的，且存在 $\delta_0>0$ 善意的一切满足

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\Phi}_0\|<\delta_0$$

的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 都有

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\Phi}(t)\|=0$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是渐进稳定的.

【定义 5.4】 若 (5.1) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是渐进稳定的且存在区域 D_0，使得

$$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\Phi}(t)\|=0,\qquad \forall\,\boldsymbol{x}_0\in D_0$$

则称 D_0 为解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的吸引域.

【注 5.5】 在研究 (5.1) 的某一特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的稳定性时，利用变换

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\Phi}(t)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=G(t,\boldsymbol{y})$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t,y)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\Phi})-\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\Phi})$$

显然有 $\boldsymbol{G}(t,0)=0$. 即 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 的特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ 对应着 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y})$ 的零解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$（奇点）. 因此研究稳定性只需研究奇点的稳定性即可.

【例题 5.6】 微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x$$

的零解是稳定的，但不是渐进稳定的.

证明.

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

是该方程组的零解. 当 $t=t_0$ 时，过 (x_0,y_0) 的解为

$$\begin{cases}x=c_0\cos(t-t_0)-y_0\sin(t-t_0)\\ y=x_0\sin(t-t_0)+y_0\cos(t-t_0)\end{cases}$$

注意到

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2,\qquad \forall\,t\in\mathbb{R}$$

因此 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta$ 时

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta=\varepsilon$$

因此零解是渐进稳定的.

又由于该解是一个周期函数，因而不满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{x^2+y^2}=0$，因此不是渐进稳定的. □

【例题 5.7】 微分方程组

$$\begin{cases}x'=-y-x\left(1-x^2-y^2\right)\\ y'=x-y\left(1-x^2-y^2\right)\end{cases}$$

是渐进稳定的.

证明. 初始条件为 $t=t_0,(x_0,y_0)$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sqrt{x^2+y^2}\left(1-x^2-y^2\right)$$

因此 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,\varepsilon)$，有

$$1-x^2-y^2>0\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}<-\sqrt{x^2+y^2}<0$$

因此有

$$\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta\leqslant\varepsilon,\qquad\forall\,t>t_0$$

因此该微分方程的零解是稳定的.

又注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}<-\sqrt{x^2+y^2}\qquad&\Longrightarrow\qquad\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)<\int_{t_0}^{t}-\mathrm{d}t\\&\Longrightarrow\qquad\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot e^{-(t-t_0)}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{x^2+y^2}=0,\qquad\forall\,(x_0,y_0)\in B(\mathbf{0},\delta)$$

故零解是渐进稳定的. □

【命题 5.8】 一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(t)x$$

稳定的充要条件为存在 M 使得

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\leqslant M$$

渐进稳定的充要条件为存在 M 使得

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\leqslant M\qquad\text{且}\qquad\lim_{t\to+\infty}\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s=-\infty.$$

证明. 设 $x(0)=x_0$ 则该微分方程的解为

$$x=x_0\mathrm{exp}\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

必要性：设原方程的零解稳定，则 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-0|=\left|x_0\mathrm{exp}\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)\right|<\varepsilon,\qquad\forall\,x_0\in(-\delta,\delta),\forall\,t\geqslant 0$$

则易证 $\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ 有上界，这也说明了 $\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$ 有上界.

充分性：设存在 $M\in\mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\leqslant M,\qquad\forall\,t\in\mathbb{R}$$

则 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $\delta = e^{-M} \cdot \varepsilon$，则

$$|x - 0| = \left| x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s \right) \right| < \varepsilon, \qquad \forall\, x_0 \in (-\delta, \delta), \forall\, t \geqslant 0$$

原方程的零解渐进稳定当且仅当

$$\lim_{t \to +\infty} x = x_0 \exp\left(\lim_{t \to \infty} \int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s \right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{t \to +\infty} \int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s = -\infty.$$

□

5.2 自治微分方程组

【定义 5.9】(自治微分方程组) 方程组 (5.1) 右侧的 $\boldsymbol{F}$ 与 t 无关的微分方程组，形如

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

【注 5.10】 只对 $n = 2$ 的情况讨论，$n > 2$ 的情况类似. 此时方程可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y) \end{cases} \tag{5.2}$$

【命题 5.11】 设

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

是微分方程 (5.2) 的一个解，则

$$\begin{cases} x = \varphi(t + T) \\ y = \psi(t + T) \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

也是微分方程 (5.2) 的解. 即说明了从相空间的同一点出发的轨线均相同.

【命题 5.12】 设 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 关于 x, y 满足解的唯一性条件，则过相平面上任意一点 (x_0, y_0) 系统 (5.2) 有且仅有一条轨线经过.

【命题 5.13】 $\forall\, t_1, t_2$ 有

$$\begin{cases} \varphi(t_1 + t_2, x_0, y_0) = \varphi(t_2, x_1, y_1) \\ \psi(t_1 + t_2, x_0, y_0) = \psi(t_2, x_1, y_1) \end{cases}$$

其中

$$x_1 = \varphi(t_1, x_0, y_0), \qquad y_1 = \psi(t_1, x_0, y_0).$$

【命题 5.14】 设 $x = x(t), y = y(t)$ 是 (5.2) 的解. 若对于某个 t_0，存在 $T > 0$ 使得

$$x(t_0 + T) = x(t_0), \qquad y(t_0 + T) = y(t_0)$$

则有

$$x(t + T) = x(t), \qquad y(t + T) = y(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

【命题 5.15】 系统 (5.2) 出发于任何非奇点的轨线不可能在有限时间到达某奇点.

5.3 平面线性系统的奇点及相图

【定义 5.16】 考虑平面线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，则 $(0,0)$ 是系统的唯一奇点，称之为<u>初等奇点</u>；若 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 则系统没有鼓励奇点，而非孤立奇点充满一条线，称为<u>高阶奇点</u>.

<u>分析.</u>

由于必然存在非奇异的实矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型，并且有以下三种形式

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

故令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$$

由于变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 比改变奇点的位置和类型，因此只对线性系统的标准型方程进行讨论.

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\lambda + \det \boldsymbol{A} = 0$$

记

$$p = -\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}), \qquad q = \det \boldsymbol{A}, \qquad \Delta = p^2 - 4q$$

则特征根为

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

1. 特征根 λ, μ 为不等的同号实根 $(\Delta > 0, q > 0)$

   此时通解为

   $$\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda t} \\ y = c_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

   (a) 若 λ 和 μ 同号且均为负数 $(p > 0)$

   则令 $t \to +\infty$ 有

   $$\lim_{t\to+\infty} x = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} y = 0.$$

   又注意到

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{c_2}{c_1} e^{(\mu-\lambda)t}$$

   因此

i. 当 $\mu < \lambda$ 时

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

即轨线切 x 轴趋于奇点 $(0,0)$；

ii. 当 $\mu > \lambda$ 时

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = +\infty$$

即轨线切 y 轴趋于奇点 $(0,0)$.

此时称该奇点为稳定结点.

(b) 若 λ 和 μ 同号且均为正数 $(p<0)$

此时与1a的讨论类似，将 $t \to +\infty$ 改为 $t \to -\infty$，称奇点为不稳定结点.

2. λ 和 μ 为异号实根 $(\Delta > 0, q < 0)$

此时的解仍为

$$\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda t} \\ y = c_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

(a) 当 $\mu < 0 < \lambda$ 时

$$\lim_{t\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} y = 0$$

(b) 当 $\lambda < 0 < \mu$ 时

$$\lim_{t\to+\infty} x = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} y = +\infty$$

此时的奇点是不稳定的，称为鞍点.

3. λ 和 μ 是重根 $(\Delta = 0, q > 0)$

(a) Jordan 块是对角矩阵，标准型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y.$$

故轨线是过 $(0,0)$ 的射线，称奇点为临界奇点.

(b) Jordan 块不是对角矩阵，标准型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \lambda y.$$

通解为

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \qquad y(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t}$$

$c_1 = c_2 = 0$ 对应的是奇点 $(0,0)$；$c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ 对应的是 y 轴轨线. 但 x 轴不再是轨线，$c_1 \neq 0$ 时消去 t 得

$$y = cx + \frac{x}{\lambda} \log|x|. \tag{5.3}$$

由 (5.3) 知

$$\lim_{x\to 0} y = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\lambda} + c + \frac{1}{\lambda} \log|x| = \infty$$

因此所有轨线均沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 点，称这种奇点为退化奇点.

4. λ 和 μ 是共轭复根，$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta, \mu=\alpha-\mathrm{i}\beta, \beta\neq 0(\Delta<0, q>0)$

   此时系统的标准型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x+\beta y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\beta x+\alpha y.$$

   取极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$，则有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r}\cdot\alpha r^2=\alpha r$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\beta$$

   即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta.$$

   (a) $\alpha\neq 0(p\neq 0)$

   此时解得

$$r=r_0e^{\alpha t}, \qquad \theta=-\beta t+\theta_0$$

   其中 r_0, θ_0 是任意常数且 $r_0>0$. 消去 t 有

$$r=ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}$$

   这是一族对数螺线，这样的奇点称为焦点.

   (b) $\alpha=0(p=0)$

   此时通解为

$$r=r_0, \qquad \theta=-\beta t+\theta_0$$

   这是一族以原点为中心的同心圆，这样的奇点称为中心.

□

5.4 几乎线性系统解的稳定性

【定义 5.17】 考虑平面自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y) \tag{5.4}$$

不妨设 $(0,0)$ 是奇点，那么当 $f(x,y), g(x,y)$ 关于 x, y 连续可微时，利用 Taylor 展开有

$$f(x,y)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)+\varphi(x,y)$$
$$g(x,y)=g_x(0,0)x+g_y(0,0)+\psi(x,y)$$

并记 $a=f_x(0,0), b=f_y(0,0), c=g_x(0,0), d=g_y(0,0)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by+\varphi(x,y)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy+\psi(x,y)\end{cases} \tag{5.5}$$

并把线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy \tag{5.6}$$

称为系统 (5.4) 的线性近似系统.

进一步，若系统 (5.4) 的函数 φ, ψ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

则称系统 (5.5) 在奇点 $(0,0)$ 邻域为几乎线性系统.

【定理 5.18】 设 $O(0,0)$ 时几乎线性系统 (5.5) 的初等奇点，则当 $O(0,0)$ 时其线性近似系统 (5.6) 的鞍点、结点、焦点时，它也是系统 (5.5) 的鞍点、结点、焦点，并且具有相同的稳定性.

【注 5.19】 当 $(0,0)$ 是中心时没有对应的结论.

【定理 5.20】 考虑 n 阶常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

并设其特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 则

1. 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 均有负实部，则系统 (5.7) 的零解是渐进稳定的.
2. 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 至少有一个具有正实部，则系统 (5.7) 的零解是不稳定的.
3. 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 无正实部，但是有灵根或零实部的纯虚根，则当零根或者零实部根的初等因子都是一次时，系统 (5.7) 的零解是稳定的.

【定理 5.21】(Routh-Hurwitz 判据) 对一元方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{5.8}$$

其中 $a_0 > 0$. 作行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中 $i > n$ 时 $a_i = 0$. 则式子 (5.8) 的所有根均具有负实部的充要条件是 Δ_n 的所有主子式均大于 0.

【定理 5.22】 考虑非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{5.9}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_2(x_1,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

并且满足 $\boldsymbol{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 以及

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}=\frac{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$$

则称式 (5.9) 也是几乎线性系统且 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是其解. 并且有

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根均具有负实部, 则系统 (5.9) 的零解是渐进稳定的;
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 的存在特征根具有正实部, 则系统 (5.9) 的零解是不稳定的;
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征根恰好有一个零实部的根或零根，则系统 (5.9) 的零解不能由线性系统确定, 称之为临界情形.

5.5 Lyapunov 第二方法

【定义 5.23】 设 $V(\boldsymbol{x})=V(x_1,\cdots,x_n)$ 是定义在 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 上的单值实连续函数，并且具有连续偏导数，$V(0)=0$. 若

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant 0\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in B(\mathbf{0},H)$$

则称函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是常正的；若

$$V(\boldsymbol{x})>0,\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$$

则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定的.

【命题 5.24】 若 $V(x,y)$ 是一个有二阶连续偏导数的二维正定 V 函数，则对于适当的 $h>0, V(x,y)=h$ 是一条包围原点的闭曲线.

【定义 5.25】 考虑非线性自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{5.10}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_1(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

假定 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在原点的某个邻域内满足解的存在唯一性. 把式 (5.10) 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 代入 V 函数中得到 t 的复合函数，对 V 函数关于 t 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}.$$

用方程组 (5.10) 的解代入上式有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.10)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j\left(x_1(t),\cdots,x_n(t)\right)$$

称这样求得的导数 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 为 $V(\boldsymbol{x})$ 沿着方程组 (5.10) 的全导数.

【定理 5.26】 对于系统 (5.10)，若存在一个正定的函数 $V(\boldsymbol{x})$，并且此 V 函数沿着系统方程组 (5.10) 的全导数 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 为常负函数或者恒等于零，则方程组 (5.10) 的零解是稳定的.

证明.

□

【定理 5.27】 对于系统 (5.10)，若存在一个正定的函数 $V(\boldsymbol{x})$，并且此 V 函数沿着系统方程组 (5.10) 的全导数 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 为负定函数，则方程组 (5.10) 的零解是渐进稳定的.

【定理 5.28】 对于系统 (5.10)，若存在一个连续可微的函数 $V(\boldsymbol{x})$, $V(\mathbf{0})=0$，它在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 点的任何邻域内至少有一点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得 $V(\boldsymbol{x}^*)>0(<0)$，那么，若存在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的某个邻域 D 使得 D 中 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是正定 (负定) 的，则系统 (5.10) 的零解是不稳定的.

5.6 极限环

【定义 5.29】 相平面上孤立的闭轨线称为极限环. 若 Γ 是系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y). \tag{5.11}$$

的一个极限环，若存在 Γ 的一个 δ 邻域，使得从此邻域内出发的其它解均正向 $(t\to+\infty)$ 趋近于 Γ，则称 Γ 是稳定的极限环. 其它解均负向 $(t\to-\infty)$ 趋近于 Γ，则称 Γ 是不稳定的极限环.

【定理 5.30】(Poincare-Bendixson 环域定理) 设区域 G 是由两条简单闭曲线 l_1 和 l_2 围成的环形区域且满足

1. G 及其边界 l_1,l_2 上不含奇点;
2. 从 G 的边界 l_1,l_2 上各点出发的轨线都不能离开（或进入）$\overline{G}$;
3. l_1,l_2 均不是闭轨线，则在 G 内至少存在一个外稳定闭轨和一个内稳定闭轨（外不稳定闭轨和一个内不稳定闭轨）. 若闭轨唯一，则一定是一个稳定的（不稳定的）极限环.

【定理 5.31】 设系统 (5.11) 右端函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在某个单连域 D 内连续可微，且

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

在 D 内不变号，并且在 D 的任何子域内不恒为 0，则方程组 (5.11) 在 D 内不存在任何闭轨线.

证明. 反设 D 内有一个闭轨线 $\Gamma: x=x(t), y=y(t)$，周期为 T，Γ 所围的区域为 D_Γ，显然 $D_\Gamma \subseteq D$. 由 Green 公式有

$$\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial D_\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}y-g(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^T\left(f(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-g(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\left(f(x,y)\cdot g(x,y)-g(x,y)\cdot f(x,y)\right)\mathrm{d}t=0$$

这与

$$\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\neq 0$$

矛盾，故 Γ 不存在. □

【定理 5.32】 对于系统 (5.11) 若在某个单连域 D 内存在一个连续可微的函数 $B(x,y)$，使得

$$\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)$$

在 D 内不变号，并且在 D 的任何子域内不恒为 0，则方程组 (5.11) 在 D 内不存在任何闭轨线.

【定理 5.33】 若沿着系统 (5.11) 的极限环 Γ 有

$$\int_0^T\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}t<0(>0)$$

则 Γ 是稳定的 (不稳定的), 其中 T 是 Γ 的周期.