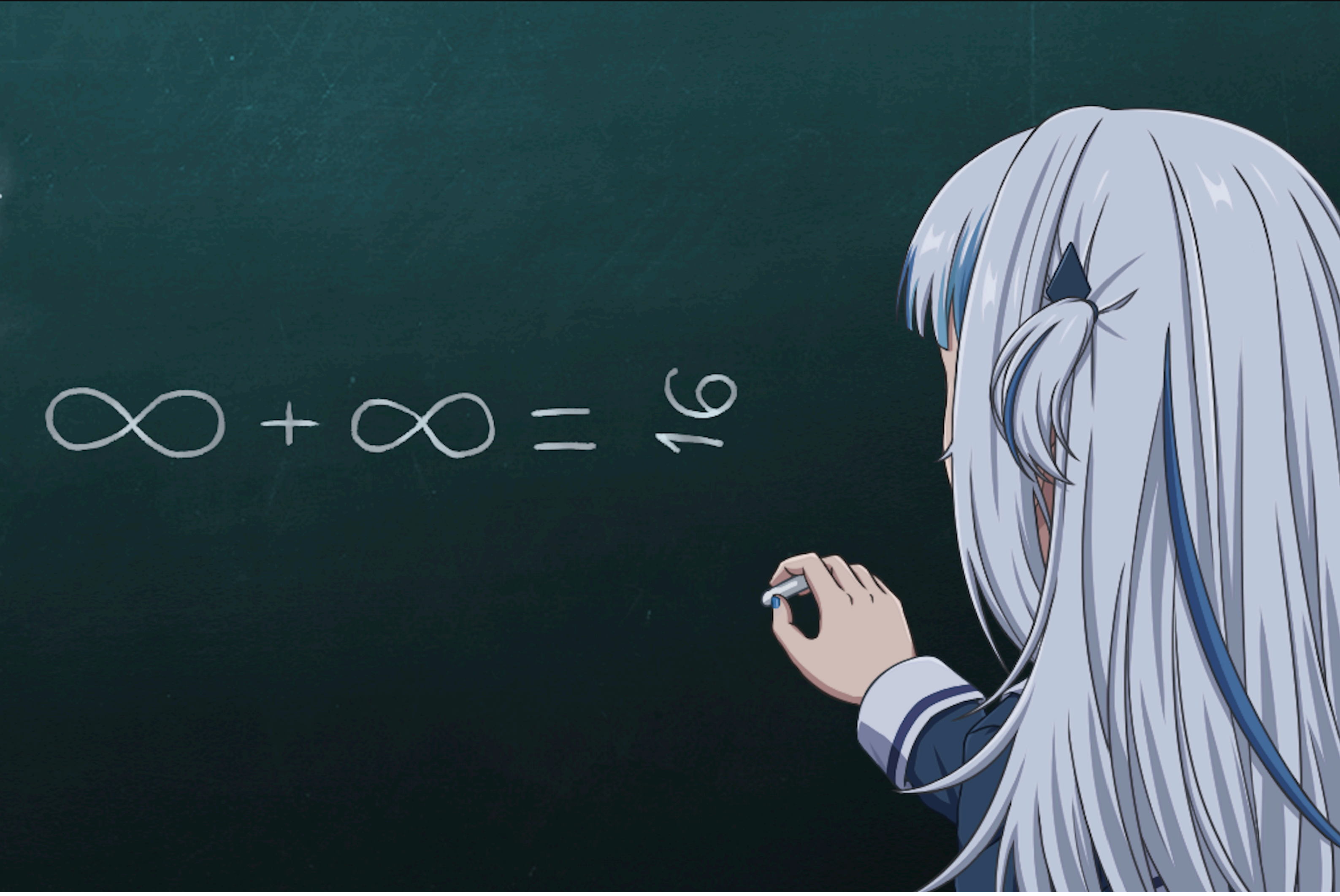

偏微分方程

Partial Differential Equations

作者：杨嘉昱

时间：2024 年 6 月 19 日

西安交通大学数学与统计学院

目录

Chapter 1

波动方程

1.1 特征线法

我们以一个例子来说明特征线法的求解过程。

【例题 1.1】 求下列 Cauchy 问题的解

$$\begin{cases} u_t + (x+t)u_x + u = x, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

解.

1. 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t, \qquad x(0) = C.$$

   解得

$$x(t) = e^t(1+C) - (1+t).$$

2. 沿着特征线，设

$$U(t) = u(x(t), t),$$

   那么 U 满足 ODE:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -U + x(t) = e^t(1+C) - (1+t), \qquad U(0) = x(0) = C$$

   解得

$$U = \frac{1}{2}(C+1)e^t + \frac{1}{2}(C-1)e^{-t} - t.$$

3. 将 C 带入方程得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\,(x+t+1) - e^{-t} + \frac{1}{2}(x-t+1).$$

□

1.2 一维初值问题

1.2.1 问题的简化

记

$$\Box u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

并称之为 d' Alembert 算子。考虑波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\Box u=f & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u=\phi,\ u_t=\psi & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}$$

由于 $\Box$ 的线性性，可以将其分为以下三个问题

$$\begin{cases}\Box u=0 & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u=\phi,\ u_t=0 & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}\tag{1.1}$$

$$\begin{cases}\Box u=0 & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u=0,\ u_t=\psi & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}\tag{1.2}$$

$$\begin{cases}\Box u=f & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u=0,\ u_t=0 & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}\tag{1.3}$$

若记三个问题的解分别为 u_1,u_2,u_3，那么第一个问题的解为

$$u=u_1+u_2+u_3.$$

【定理 1.2】 记1.2的解为 M_ψ，那么1.1、1.3的解分别为

$$u_1(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}M_\phi,(x,t)\qquad u_3(x,t)=\int_0^\tau M_{f_\tau}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $f_\tau=f(x,\tau)$。

从而我们只需要考虑问题1.2解即可。

1.2.2 d' Alembert 公式的导出

只考虑初值问题

$$\begin{cases}\Box u=0 & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ u=0,\ u_t=\psi & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}$$

特征线法

注意到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

运用特征线求解即可。

行波法

作变量替换

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at$$

那么

$$\Box u = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_{\xi\eta} = 0$$

从而

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at).$$

由 $u(x,0) = 0$ 知

$$F(x) + G(x) = 0.$$

由 $u_t(x,0) = \phi(x)$ 知

$$aF'(x) - aG'(x) = \phi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (F(x) - F(0)) - (G(x) - G(0)) = \frac{1}{a}\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

而 $F + G = 0$，故

$$\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = 2(F(x) - F(0)) = -2(G(x) - G(0))$$

从而

$$u(x,y) = \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + F(0) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + G(0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

那么

$$\begin{cases} \Box u = f & \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = \phi,\ u_t = \psi & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+at) + \phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.$$

若 $f = 0$，那么 u 的解称为 d' Alembert 公式。

1.2.3 能量不等式

以上过程的求解只是形式解。有了形式解，我们要考虑解是否是唯一、稳定的。

【引理 1.3】(Gronwall Inequality) 若 $G \in C^1[0,T]$ 非负，$G(0) = 0$，且

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} \le CG(\tau) + F(\tau), \qquad \forall\, \tau \in [0,T].$$

其中 $C > 0$，$F(\tau)$ 是 $[0,T]$ 上不减的非负可积函数。那么

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} \le e^{C\tau}F(\tau), \qquad G(\tau) \le C^{-1}\left(e^{C\tau} - 1\right)F(\tau).$$

证明.

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} \le CG(\tau) + F(\tau) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(G(\tau)e^{-C\tau}\right) \le F(\tau)e^{-C\tau}$$

从而

$$G(t)e^{-Ct} \le \int_0^t F(\tau)e^{-C\tau}\mathrm{d}\tau \le C^{-1}F(t)\left(1 - e^{-Ct}\right)$$

从而

$$G(t) \le C^{-1}\left(e^{Ct} - 1\right)F(t).$$

带入条件有

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \le e^{Ct}F(t).$$

□

【定理 1.4】 设 $u \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ 是问题

$$\begin{cases} \Box u = f & \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = \phi,\ u_t = \psi & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

的解，那么有估计

$$\int_{\Omega_t} u_t^2 + a^2u_x^2\mathrm{d}x \le M\left(\int_{\Omega_0} \psi^2 + a^2\phi_x^2\mathrm{d}x + \int_{k_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right),$$

$$\int_{K_t} u_t^2 + a^2u_x^2\mathrm{d}x \le M\left(\int_{\Omega_0} \psi^2 + a^2\phi_x^2\mathrm{d}x + \int_{k_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right).$$

证明. $\forall\,(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$，定义能量

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} u_t^2 + a^2u_x^2\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} u_tu_{tt} + a^2u_xu_{xt}\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\left(u_t^2 - a^2u_x^2\right)\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \\ &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} u_tf\mathrm{d}x + a^2u_xu_t\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} - \frac{a}{2}\left(u_t^2 + a^2u_x^2\right)\Big|_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \end{aligned}$$

但由 Cauchy 不等式知

$$2a^2u_xu_t \le au_x^2 + a^3u_t^2.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le \int_{\Omega_t} u_tf\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad E(t) \le E(0) + \frac{1}{2}\int_{K_t}\left(u_t^2 + f^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

记

$$\Omega(t) = \int_0^t E(\tau)\mathrm{d}\tau$$

那么由上式知

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \le E(0) + \frac{1}{2}\int_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \Omega$$

由 Gronwall 不等式知命题成立。 □

【推论 1.5】

$$\int_{\Omega_t} u^2\mathrm{d}x \le M'\left(\int_{\Omega_0}\left(\phi^2+\psi^2a^2\phi_x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right).$$

证明. 只需注意到

$$\int_{\Omega_t} u^2(x,t)-u^2(x,0)\mathrm{d}x=\int_{\omega_t}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{K_t} 2u_t u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_{K_t} u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{K_t} u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

那么令

$$G(t)=\int_{K_t} u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\le\Omega(t)+\int_{K_t} u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_t}\phi^2\mathrm{d}x$$

由 Gronwell 不等式即得。 □

1.2.4 半无界问题

考虑问题

$$\begin{cases}\Box u=f & \mathbb{R}_{>0}\times(0,+\infty)\\ u=\phi,\ u_t=\psi & \mathbb{R}_{>0}\times\{t=0\}\\ u=g & \{x=0\}\times(0,+\infty)\end{cases}$$

1. 若 $g=0$ 那么对其进行奇延拓后求解。若 $f=\phi=0$，则解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad x\ge at,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad x<at.$$

为了保证解的适定性，ψ,f,ϕ 满足

$$\phi(0)=0,\ \psi(0)=0,\ a^2\phi''(0,0)+f(0,0)=0.$$

2. 若 $g\ne0$ 那么做替换 $u=v+g$ 之后进行奇延拓。

1.3 初值问题（2、3 维）

【引理 1.6】 记

$$U(x;r,t)=⨍_{\partial B(y,r)} u(y,t)\mathrm{d}S(x).$$

若 u 满足

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0$$

那么 U 满足

$$U_{tt}-a^2\left(U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r\right)=0$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}U_r&=\frac{\partial}{\partial r}\fint_{\partial B(0,1)}u(x+rz,t)\mathrm{d}S(z)=\fint_{\partial B(0,1)}Du\cdot z\mathrm{d}S(z)\\&=\fint_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u}{\partial\nu}(y,t)\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,t)}\Delta u\mathrm{d}y\end{aligned}$$

从而

$$a^2r^{n-1}U_r=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(x,t)}u_{tt}\mathrm{d}y\qquad\Longrightarrow\qquad a^2\left(r^{n-1}U_r\right)_r=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(x,r)}u_{tt}\mathrm{d}y$$

即

$$U_{tt}-a^2\left(U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r\right)=0$$

□

【注 1.7】 当 $n=3$ 时

$$rU_{tt}=a^2\left(rU_{rr}+2U_r\right)=a^2(rU_r+U)_r=a^2\left(rU\right)_{rr}$$

【定理 1.8】(Kinchhoff 公式) 设 u 满足

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0 & \mathbb{R}^3\times(0,+\infty)\\ u=0,\ u_t=h & \mathbb{R}^3\times\{t=0\}\end{cases}$$

那么

$$u(x,t)=t\cdot\fint_{\partial B(x,at)}h(y)\mathrm{d}y.$$

证明. 对于任意给定的 $x\in\mathbb{R}^3$，设

$$\tilde{U}(x;r,t)=r\cdot U,\qquad H(x;r)=r\cdot\fint_{\partial B(x,r)}h(y)\mathrm{d}S(y).$$

那么 $\tilde{U}$ 满足方程

$$\begin{cases}\tilde{U}_{tt}-a^2\tilde{U}_{rr}=0 & \mathbb{R}\times(0,+\infty)\\ \tilde{U}=0,\ \tilde{U}_t=H & \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}$$

由半无界问题的 d' Alembert 公式知

$$\tilde{U}(x;r,t)=\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r}H(x;\xi)\mathrm{d}\xi$$

从而

$$u(x,t)=\lim_{r\to0^+}\fint_{\partial B(x,r)}u(y,t)\mathrm{d}y=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}H(x;\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{1}{a}H(x,at)=t\cdot\fint_{\partial B(x,at)}h(y)\mathrm{d}S(y).$$

□

【定理 1.9】(Poisson 公式) 设 u 满足

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0 & \mathbb{R}^2\times(0,+\infty)\\ u=0,\ u_t=h & \mathbb{R}^2\times\{t=0\}\end{cases}$$

那么

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_{B(x,at)}\frac{h(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}\mathrm{d}y.$$

1.4 混合问题

1.4.1 分离变量法

以一个例子来说明分离变量法的适用方法。

【例题 1.10】 用分离变量法求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0 & (x,t)\in Q\\ u_x|_{x=0}=A\sin\omega t,\ u|_{x=\ell}=0, & t\geq0\\ u|_{t=0}=1,\ u_t|_{t=0}=0, & x\in[x,\ell]\end{cases}.$$

解. 令

$$v(x,t)=u(x,t)-A(x-\ell)\sin\omega t,$$

那么 v 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2v}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}=A\omega^2(x-\ell)\sin\omega t & (x,t)\in Q\\ v_x|_{x=0}=0,\ v|_{x=\ell}=0, & t\geq0\\ v|_{t=0}=1,\ v_t|_{t=0}=-A\omega(x-\ell), & x\in[x,\ell]\end{cases}.$$

记 $v(x,t)=X(x)T(t)$. 其特征方程为

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=0,\ X(\ell)=0\end{cases}$$

解得特征方程为

$$X_n(x)=\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell},\qquad\forall\,n\in\mathbb{Z}_{>0}.\tag{1.4}$$

从而

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}$$

带入边界条件有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{\ell^2}T_n(t)\right)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}=A\omega^2(x-\ell)\sin\omega t,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}=1,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}=-A\omega(x-\ell)\end{cases}$$

即 $\forall\, n\in\mathbb{Z}_{>0}$，$T_n$ 满足微分方程

$$\begin{cases}T_n''(t)+\dfrac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{\ell^2}T_n(t)=f_n(t)\\ T_n(0)=\alpha_n,\qquad T_n'(0)=\beta_n.\end{cases}$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}A\omega^2(x-\ell)\sin\omega t\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}\mathrm{d}x=-\frac{8A\omega^2\ell}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\omega t=-\omega\beta_n\sin\omega t,$$

$$\alpha_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{(2n+1)\pi},\tag{1.5}$$

$$\beta_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}-A\omega(x-\ell)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\ell}\mathrm{d}x=\frac{8A\omega\ell}{(2n-1)^2\pi^2}.\tag{1.6}$$

记

$$\omega_n=\frac{2n-1}{2\ell}\pi.\tag{1.7}$$

解上面这个初值问题，得

$$\begin{aligned}T_n(t)=&\alpha_n\cos\omega_nt+\frac{\beta_n}{\omega_n}\sin\omega_nt+\frac{1}{\omega_n}\cdot\int_0^tf_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\=&\alpha_n\cos\omega_nt+\frac{\beta_n}{\omega_n}\sin\omega_nt-\frac{\omega\beta_n}{\omega_n}\cdot\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\cos((\omega+\omega_n)\tau-\omega_nt)-\cos((\omega-\omega_n)\tau+\omega_nt)\mathrm{d}\tau$$

首先设若 $\omega\neq\omega_n$，那么

$$\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\omega\sin\omega_nt-\omega_n\sin\omega t}{\omega^2-\omega_n^2}$$

从而

$$T_n(t)=\alpha_n\cos\omega_nt+\frac{\beta_n}{\omega_n}\sin\omega_nt-\frac{\omega\beta_n}{\omega_n\left(\omega^2-\omega_n^2\right)}\cdot(\omega\sin\omega_nt-\omega_n\sin\omega t)\tag{1.8}$$

其中 $\alpha_n,\beta_n,\omega_n$ 由式1.5, 1.6, 1.7 给出

1. 若不产生共振现象，即 $\omega \neq \omega_n, \forall\, n \in \mathbb{Z}_{>0}$，那么

$$u(x,t) = A(x-\ell)\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

   其中 T_n, X_n 由式1.8, 1.4 给出

2. 若产生共振，设 $\omega = \omega_k$，则

$$\widetilde{T}_k(t) = \lim_{\omega\to\omega_k} T_k(t) = \alpha_k \cos\omega_k t + \frac{\beta_k}{\omega_k}\sin\omega_k t - \beta_k\left(\frac{\sin\omega_k t}{2\omega_k} - \frac{t\cos\omega_k t}{2}\right)$$

   那么

$$u(x,t) = A(x-\ell)\sin\omega t + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq k}} X_n(x)T_n(t) + X_k(x)\widetilde{T}_k(t).$$

□

1.4.2 广义解

【定义 1.11】(广义解) 设 $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$ 称为方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\ell)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x \leq \ell \\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

的广义解，若满足

$$\iint_{Q_T} u\Box\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^\ell (\psi(x)\zeta(x,0) - \phi(x)\zeta_t(x,0))\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall\, \zeta \in \mathscr{D}.$$

其中

$$Q_T = (0,\ell)\times(0,T], \qquad \mathscr{D} = \{\zeta \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T}) : \zeta(0,t) = \zeta(\ell,t) = \zeta(x,T) = \zeta_t(x,T) = 0\}$$

【注 1.12】 古典解一定是广义解。设 $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ 满足 $\Box u = 0$，那么

$$0 = \iint_{Q_T} \Box u\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \qquad \forall\, \zeta \in \mathscr{D}.$$

由分部积分公式有

$$\int_0^T u_{tt}\zeta \mathrm{d}t = -\int_0^T u_t\zeta_t \mathrm{d}t + u_t\zeta|_0^T = \int_0^T u\zeta_{tt}\mathrm{d}t + (u_t\zeta - u\zeta_t)\,|_0^T.$$

以及

$$\int_0^\ell u_{xx}\zeta \mathrm{d}x = -\int_0^\ell u_x\zeta_x \mathrm{d}x + u_x\zeta|_0^\ell = \int_0^\ell u\zeta_{xx}\mathrm{d}x + (u_x\zeta - u\zeta_x)\,|_0^\ell.$$

由定解条件以及 $\mathscr{D}$ 的性质立得。

【定理 1.13】 广义解是唯一的。

证明. 设 u_1, u_2 均为广义解，那么

$$\iint_{Q_t} (u_1 - u_2)\,\Box\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall\, \zeta \in \mathscr{D}.$$

对于任意的 $g \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_T)$，考虑方程

$$\begin{cases} \Box\zeta = g(x,t) & (x,t) \in Q_T \\ \zeta(0,t) = \zeta(\ell,t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \zeta(x,T) = \zeta_t(x,T) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

那么做变量替换，令 $\overline{\zeta}(x,t) = \zeta(T-t)$，那么 $\overline{\zeta}$ 在 Q_T 上满足

$$\begin{cases} \Box\overline{\zeta} = g(x,T-t) & (x,t) \in Q_T \\ \overline{\zeta}(0,t) = \overline{\zeta}(\ell,t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \overline{\zeta}(x,0) = \overline{\zeta}_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

那么由 g 的光滑性及角点相容性条件知上述问题有解。故

$$\iint_{Q_t} (u_1 - u_2)\, g \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall\, g \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_T)$$

从而 $u_1 = u_2$。

$\square$

CHAPTER 2

热传导问题

2.1 初值问题

2.1.1 Fourier 变换

【定义 2.1】 设 $f \in L(\mathbb{R})$，那么 f 的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\lambda x) \mathrm{d}x$$

【注 2.2】 由 $f \in L(\mathbb{R})$ 知

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) \exp(-i\lambda x)| \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

从而 $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$，即上述定义是合理的。

【注 2.3】 Fourier 变换可以延拓在 $L^p(\mathbb{R})$ 上，也可以对有限的符号测度定义 Fourier 变换。具体可以参考文献 [5] 的第八章内容。

【定理 2.4】(反演公式) 若 $f \in L(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$，则

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\lambda) \exp(i\lambda x) \mathrm{d}\lambda = f(x)$$

【命题 2.5】 Fourier 变换的性质

1.
$$f_i \in L(\mathbb{R}),\ a_i \in \mathbb{C} \qquad \Longrightarrow \qquad (a_1 f_1 + a_2 f_2)^\wedge = a_1 f_1^\wedge + a_2 f_2^\wedge$$

2.
$$f, f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^\wedge = i\lambda f^\wedge$$

3.
$$f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

4.
$$f \in L(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad (f(x-a))^{\wedge}(\lambda) = e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda)$$

5.
$$f \in L(\mathbb{R}),\ k \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (f(kx))^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$

6.
$$f \in L(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad (f(x))^{\vee}(\lambda) = \hat{f}(-\lambda) = (f(-x))^{\wedge}(\lambda)$$

7.
$$f, g \in L(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad (f * g)^{\wedge}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\cdot\hat{g}$$

【定理 2.6】(Fourier 变换的不动点)

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^{\wedge}(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\right).$$

证明. 记
$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$
则一方面
$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{-i\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}e^{-i\lambda x}\\ &= \frac{1}{-i\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) = -i\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x.$$

即有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\hat{f}(\lambda) = -\lambda\hat{f}(\lambda), \qquad \hat{f}(0) = 1.$$

解这个微分方程得
$$\hat{f}(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\right).$$

□

【推论 2.7】 设 $f(x) = \exp\left(-Ax^2\right)$，则
$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2A}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4A}\right)$$

2.1.2 Poisson 公式

【定理 2.8】 热传导方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u = \phi & (x,t) \in \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.1}$$

的解为

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \tag{2.2}$$

上式被称为 Poisson 公式。

证明. 对方程关于变量 x 作 Fourier 变换有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u} + a^2\lambda^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t) \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\phi} \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}\exp(-a^2\lambda^2 t) + \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)\exp\left(-a^2\lambda^2(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau.$$

由推论，若设

$$g_t(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$$

则

$$\hat{g} = \exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)$$

从而作 Fourier 逆变换有

$$u(x,t) = \sqrt{2\pi}\left(\phi * g_t + \int_0^t f * g_{t-\tau}\mathrm{d}\tau\right)$$

记

$$K(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\chi_{\{t>0\}}$$

则

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.$$

□

【定理 2.9】 若 $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 且有界，$f=0$，则 Poisson 确定的函数是初值问题2.1的解。

证明. 由于 $f=0$，因此解为

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当 $t>0$ 时，$K_t = K(\cdot,t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$，因此 $K_t * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$。从而极限号和积分号可换序。并且有

$$K_t - a^2 K_{xx} = 0$$

从而当 $t>0$ 时有

$$u_t - a^2 u_{tt} = \int_{\mathbb{R}} \left(K_t(x-\xi,t) - a^2 K_{xx}(x-\xi,t)\right)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

下证

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0^+}} u(x,t) = \phi(x_0).$$

事实上作变量替换 $\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t})$ 有

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\phi(x+2a\sqrt{t}\eta)\mathrm{d}\eta.$$

由于 ϕ 有界，因此上式一致收敛，从而令 $t\to 0^+$ 知命题成立。 □

【注 2.10】 若 ϕ 满足

$$\phi(x) = \mathcal{O}\left(\exp\left(Ax^2\right)\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

则 u 在区域

$$Q = \mathbb{R}\times\left\{0\le t<\frac{1}{4a^2A}\right\}$$

上仍是热传导方程的解。事实上由估计

$$e^{-\eta^2}\phi(x+wa\sqrt{t}\eta) = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\left(1-4Aa^2t\right)\eta^2\right)\right)$$

从而 Q 保证了积分

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\phi(x+2a\sqrt{t}\eta)\mathrm{d}\eta.$$

收敛。

2.1.3 广义函数

广义函数的定义及例子

关于试验函数空间的具体定义，可以参考文献 [4] 的第一章及第六章部分。其上引用的拓扑是较为繁琐的，在此我们为了便于应用，给出下述定义。

【定义 2.11】 设 $\{\phi\}\cup\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ 且

1. 存在 $M>0$ 使得

$$\phi=\phi_n=0, \qquad |x|\ge M.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{[-M,M]}\left|\phi_n^{(k)}-\phi^{(k)}\right| = 0, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

则称序列 $\{\phi_n\}$ 收敛于 ϕ。规定了上述收敛性的线性空间 $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ 称为基本空间 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$。$\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 称为试验函数。

【定义 2.12】 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 上有界线型泛函称为广义函数，广义函数的全体记作 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$。设 $f\in\mathscr{D}',\phi\in\mathscr{D}$，用 $\langle f,\phi\rangle$ 表示泛函作用，称为对偶积。

【定义 2.13】(δ 函数) δ 函数满足

$$\langle\delta,\phi\rangle=\delta(0),\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{D}$$

【例题 2.14】 $\forall\, f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，$f$ 可诱导出一个广义函数，仍用 f 表示

$$\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f\phi\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{D}.$$

【定义 2.15】(弱收敛) 设 $f,f_n\in\mathscr{D}'$，若

$$\lim\langle f_n,\phi\rangle=\langle f,\phi\rangle,\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{D}.$$

则称 $\{f_n\}$ 收敛于 f。

【例题 2.16】 设

$$Q_n(x)=\frac{n}{2}\chi_{(-1/n,1/n]}(x)$$

则

$$Q_n(x)\to\delta(x).$$

【例题 2.17】(Dirichlet Kernal) 设

$$K_n(x)=\begin{cases}1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)x}{\sin\dfrac{x}{2}} & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

则

$$K_n(x)\to\delta(x),\qquad n\to\infty.$$

【例题 2.18】(Poisson Kernal) 设

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right) & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

则

$$K(x,t)\to\delta(0),\qquad t\to 0^+.$$

广义函数的运算

广义函数运算的定义可以归结为对广义函数空间的某个子空间上所定义的线性算子的延拓，具体可以参考文献 [5] 的第九章。在此我们只给出相关定义。

【定义 2.19】(广义函数的导数) 广义函数 f 的 k 阶导数（微商）$f^{(k)}$ 也是广义函数

$$\langle f^{(k)},\phi\rangle=(-1)^k\langle f,\phi^{(k)}\rangle,\qquad\forall\,\phi\in\mathscr{D}.$$

【例题 2.20】 δ 函数的微商

$$\langle \delta^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \phi^{(k)} \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(0), \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}.$$

【例题 2.21】 Heaviside 函数

$$H(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x)$$

的广义微商是 δ 函数。

【定义 2.22】(广义函数的平移) $f \in \mathscr{D}'$

$$\langle \tau_\xi f, \phi \rangle = \langle f, \tau_{-\xi} \phi \rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}$$

其中 τ_ξ 为右平移算子:

$$\tau_\xi f(x) = f(x - \xi), \qquad \forall\, f \in \mathscr{D}$$

【定义 2.23】(广义函数的乘法) $f \in \mathcal{C}^\infty, \Lambda \in \mathscr{D}'$，则 $f\Lambda$ 定义为

$$\langle f\Lambda, \phi \rangle = \langle \Lambda, f\phi \rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}.$$

上式有意义因为 $f\phi \in \mathscr{D}$。

【定义 2.24】(广义函数的 Fourier 变换)

$$\langle (f(x))^\wedge(\lambda), \phi(\lambda) \rangle = \langle f(x), (\phi(\lambda))^\wedge(x) \rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}.$$

【注 2.25】 若 $f \in \mathscr{D}'$ 是由局部可积函数所诱导，那么上式子可以理解为

$$\begin{aligned}\langle (f(x))^\wedge(\lambda), \phi(\lambda) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x \right) \phi(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi(\lambda) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}\lambda \right) f(x) \mathrm{d}x = \langle f(x), (\phi(\lambda))^\wedge(x) \rangle\end{aligned}$$

【例题 2.26】($\delta(x-\xi)$ 的 Fourier 变换) 由定义知 $\forall\, \phi \in \mathscr{D}$

$$\langle \mathcal{F}(\delta(x-\xi)), \phi(\lambda) \rangle = \left\langle \delta(x-\xi), (\phi(\lambda))^\wedge(x) \right\rangle = (\phi(\lambda))^\wedge(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) e^{-i\lambda\xi} \mathrm{d}\lambda$$

即

$$\mathcal{F}\left(\delta(x-\xi)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi}$$

从而

$$\left(e^{-i\lambda\xi}\right)^\vee = \sqrt{2\pi}\,\delta(x-\xi).$$

【注 2.27】 上式可以理解为对测度的 Fourier 变换，具体可以参考文献 [5]。若 μ 是一个有限的测度，则定义其 Fourier 变换为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\lambda x} \mathrm{d}\mu(x).$$

那么广义函数 $\delta(x-\xi)$ 可以理解为由 point mess 测度诱导的广义函数，即

$$\delta_\xi(E) = \begin{cases} 1 & \xi \in E \\ 0 & \xi \notin E \end{cases}$$

故

$$\hat{\delta_\xi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\lambda x} \mathrm{d}\delta_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi}$$

2.1.4 基本解

【定义 2.28】 设 $Q=\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, $\forall\,(\xi,\tau)\in Q$，若 $u(x,t)\in L_{\text{loc}}(Q)\cap\mathcal{C}(\overline{Q}\backslash(\xi,\tau))$ 且在广义函数的意义下满足

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\delta(x-\xi,t-\tau) & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u=0 & (x,t)\in\mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.3}$$

则称其满足热传导方程的基本解，记为 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$。

【定理 2.29】 基本解可取为 $K(x-\xi,t-\tau)$。

2.2 混合问题

我们以一个例子来说明混合问题的做法。

【例题 2.30】

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<\pi,t>0 \\ u|_{t=0}=\sin x & 0\le x\le\pi \\ u_x|_{x=0}=u_x|_{x=\pi}=0 & t>0. \end{cases}$$

解. 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，则特征问题为

$$X''+\lambda X=0,\qquad X'(0)=X'(\pi)=0$$

解得

$$X_n(x)=\cos n\pi,\qquad \lambda_n=n^2.$$

那么 T_n 满足

$$Tn'+n^2a^2T_n=0$$

解得

$$T_n(t)=C_n\exp\left(-n^2a^2t\right).$$

进而

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\exp\left(-n^2a^2t\right)\cos nx$$

带入边值条件有

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos n\pi\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1-n^2} & 2\mid n \\ 0 & 2\nmid n\end{cases}$$

从而

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2}\exp\left(-4n^2a^2t\right)\cos(2nx)$$

□

2.3 极值原理与最大模估计

记

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

2.3.1 弱极值原理

【定理 2.31】(弱极值原理) 设 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ 且满足 $Lu = f \leq 0$，则 u 在 $\overline{Q}$ 上的最大值必然在抛物边界 Γ 上达到。即

$$\max_{\overline{Q}} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t).$$

【推论 2.32】 设 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ 且满足 $Lu = f \geq 0$，则 u 在 $\overline{Q}$ 上的最小值必然在 Γ 上达到，即

$$\min_{\overline{Q}} u = \min_{\Gamma} u.$$

特别的，若 $Lu = 0$，那么 u 在 $\overline{Q}$ 上的最大值与最小值都必然在 Γ 上达到。

【推论 2.33】(比较原理) 设 $u, v \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ 且有 $Lu \leq Lv$，$u|_\Gamma \leq v|_\Gamma$，则在 Q 上有 $u \leq v$。

2.3.2 第一边值问题的最大模估计

考虑第一边值问题

$$\begin{cases} Lu = f & (x,t) \in Q \\ u|_{x=0} = \phi & 0 \leq x \leq \ell \\ u|_{x=0} = g_1, u|_{x=\ell} = g_2 & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.4}$$

【定理 2.34】 设 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ 是问题2.4 的解，则

$$\max_{\overline{Q}} |u| \leq T \sup |f| + \max\{\sup |\phi|, \sup |g_1|, \sup |g_2|\}.$$

【注 2.35】 上述初值问题的解是唯一稳定的。

2.3.3 第二、三边值问题的最大模估计

第二、三边值问题可以写成如下形式：

$$\begin{cases} Lu = f & (x,t) \in Q \\ u|_{x=0} = \phi & 0 \leq x \leq \ell \\ \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(t) u \right]_{x=0} = g_1, & 0 \leq t \leq T \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t) u \right]_{x=0} = g_2, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $\alpha, \beta \geq 0$，且当 $\alpha = \beta = 0$ 时上述问题为第二边值问题。

【引理 2.36】 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}^{1,0}(\overline{Q})$ 满足

$$f, \phi, g_1, g_2 \geq 0,$$

则在 $\overline{Q}$ 上 $u \geq 0$.

【定理 2.37】 设 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}^{1,0}(\overline{Q})$ 是问题2.5的解，则

$$|u| \leq C\left(\sup|f| + \max\{\sup|\phi|, \sup|g_1|, \sup|g_2|\}\right).$$

其中 C 只依赖于 a, ℓ, T。

2.3.4 初值问题的最大模估计

在区域 $Q = \mathbb{R} \times (0,T]$ 上考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f & (x,t) \in Q \\ u|_{t=0} = \phi & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

【定理 2.38】 设 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ 是初值问题2.6的有界解，则有估计

$$\sup_{\overline{Q}} |u| \leq T \sup_{Q} |f| + \sup_{\mathbb{R}} |\phi|.$$

【定理 2.39】 若 $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$ 是初值问题2.6的解，并且满足

$$|u(x,t)| \leq M e^{Ax^2}, \qquad (x,t) \in Q.$$

那么也有

$$\sup_{\overline{Q}} |u| \leq T \sup_{Q} |f| + \sup_{\mathbb{R}} |\phi|.$$

首先证明一个引理

【引理 2.40】 上述问题当

$$T \leq \frac{1}{16a^2 A}$$

时成立。

证明. 只需证明不等式

$$|u(0,t)| \leq T \sup_{Q} |f| + \sup_{\mathbb{R}} |\phi|, \qquad t \in (0,T].$$

这是因为在平移变换下由上述不等式立即得到

$$|u(x,t)| \leq T \sup_{Q} |f| + \sup_{\mathbb{R}} |\phi|, \qquad t \in (0,T].$$

首先设

$$T \leq \frac{1}{16a^2 A}$$

记
$$Q_T^L = (-L, L) \times (0, T], \qquad \forall\, L > 0.$$
对于任意的 $\varepsilon > 0$，考虑辅助函数
$$w(x,t) = Ft + B + v_\varepsilon(x,t) \pm u(x,t).$$
其中
$$v_\varepsilon(x,t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2T-t}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2(2T-t)}\right), \qquad F = \sup_Q |f|, \qquad B = \sup_{\mathbb{R}} |\phi|.$$
那么直接验证有 $Lv_\varepsilon = 0$. 从而

1.
$$Lw = F \pm f(x,t) \geq 0 \qquad w|_{t=0} = B + v_\varepsilon(x,0) \pm \phi(x) \geq 0$$

2.
$$\begin{aligned} w|_{x=\pm L} &\geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2T-t}} \exp\left(\frac{L^2}{4a^2(2T-t)}\right) - M \exp\left(AL^2\right) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2T}} \exp\left(\frac{L^2}{8a^2T}\right) - M \exp\left(AL^2\right) \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2T}} \exp\left(2AL^2\right) - \exp\left(AL^2\right). \end{aligned}$$

故 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 $L_\varepsilon > 0$ 使得
$$w|_{x=\pm L} \geq 0, \qquad \forall\, L \geq L_\varepsilon$$

这说明对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $L_\varepsilon > 0$，使得当 $L > L_\varepsilon$ 时有
$$\min_{\partial Q_L^T} u \geq 0.$$
在 Q_T^L $(L \geq L_\varepsilon)$ 上应用极值原理知
$$\min_{Q_L^T} w(x,t) \geq 0.$$
特别的
$$w(0,t) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |u(0,t)| \leq Ft + B + v(0,t) \leq FT + B + \frac{\varepsilon}{\sqrt{T}}.$$
令 $\varepsilon \to 0^+$ 得
$$|u(0,t)| \leq FT + B, \qquad \forall\, t \in (0,T].$$

□

现在给出定理的证明

证明. 那么对于任意的 $T > 0$，将区间 $[0,T]$ 划分为 m 份，
$$[0,T] = \bigcup_{j=1}^{m} [(j-1)T_1, jT_1], \qquad \text{with } \; T_1 \leq \frac{1}{16a^2A}.$$

并且 $mT_1 = T$。若记 $Q_j = \{t : (j-1)T_1 < t \le jT_1\}$ 我们用数学归纳法来证明

$$|u(x,t)| \le jFT_1 + B, \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times Q_j.$$

由引理知 $j=1$ 时成立。设 j 时成立，我们来看 $j+1$ 的情况。考虑区域 $\mathbb{R} \times Q_{j+1}$ 上的初值问题

$$\begin{cases} Lu = f & (x,t) \in \mathbb{R} \times Q_{j+1} \\ u|_{t=jT_1} = \phi(x) = u(x, jT_1) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

与引理类似在区域 $(-L, L) \times Q_{j+1}$ 上，$\forall\, \varepsilon > 0$ 构造辅助函数

$$w(x,t) = F(t - jT_1) + \sup_{\mathbb{R}} u(x, T_1) + v_\varepsilon \pm u(x,t).$$

其中

$$v_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(j+2)T_1 - t}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2((j+2)T_1 - t)}\right)$$

那么直接验证有

1. $$Lw = F \pm f \ge 0.$$

2. $$w|_{t=jT_1} \ge \sup_{\mathbb{R}} u(x, jT_1) \pm u(x, jT_1) \ge 0.$$

3. $$w|_{x=\pm L} \ge \frac{\varepsilon}{\sqrt{2T_1}} \exp\left(2AL^2\right) - \exp\left(AL^2\right).$$

   从而对于 $\varepsilon > 0$，存在 $L_\varepsilon > 0$ 使得

   $$w|_{x=\pm L} \ge 0, \qquad \forall\, L > L_\varepsilon.$$

从而当 $L > L_\varepsilon$ 时由极值原理知

$$w(x,t) \ge 0, \qquad \forall\,(x,t) \in (-L, L) \times Q_j.$$

特别的

$$|u(0,t)| \le FT_1 + \sup_{\mathbb{R}} u(x, jT_1) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{T_1}}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 并结合归纳假设知

$$|u(0,t)| \le FT_1 + jFT_1 + B = (j+1)FT_1 + B.$$

这说明

$$|u(x,t)| \le (j+1)FT_1 + B, \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times Q_{j+1}.$$

取 $j = m$ 则命题成立。 □

2.3.5 边值问题的能量模估计

记 $Q_T = (0,\ell)\times(0,T]$，在 Q_T 上考虑混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & (x,t)\in Q_T \\ u(x,0)=\phi(x) & 0\le x\le \ell \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 & 0\le t\le T. \end{cases}$$

【定理 2.41】 设 $u\in\mathcal{C}^{1,0}(\overline{Q_t})\cap\mathcal{C}^{2,1}(Q_T)$ 为边值问题的解，则有估计

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^\ell u^2(x,t)\mathrm{d}x + 2a^2\int_0^T\int_0^\ell u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le M\left(\int_0^\ell \phi^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_0^\ell f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right).$$

其中 M 只与 T 有关。

CHAPTER 3

位势方程

位势方程为

$$-\Delta u = f.$$

3.1 基本解与 Green 函数

3.1.1 基本解与 Green 公式

【定义 3.1】 $U \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 称为 n 维 Laplace 的基本解，若其满足

$$-\Delta U = \delta(x-\xi), \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

记作 $\Gamma(x;\xi)$。

【定理 3.2】 定义在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的方程

$$\Gamma(x;\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & n=2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

是 Laplace 方程的基本解。

证明. $\forall\, \varepsilon > 0$，首先设

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^2 < |x-\xi|^2 \leq 1/\varepsilon^2\}.$$

那么 $\forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x;\xi)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(x;\xi)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x$$

由分部积分公式有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(x;\xi)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x;\xi)\phi(x) - \Gamma(x;\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x)\mathrm{d}S(x).$$

当 ε 充分小时，ϕ 在球面 $\{x : |x-\xi| = 1/\varepsilon\}$ 上为 0，从而

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(x;\xi)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x = \int_{\partial B} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x;\xi)\phi(x) - \Gamma(x;\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x)\mathrm{d}S(x).$$

其中 $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-\xi| \le \varepsilon\}$, 方向向内。注意到

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x;\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^n} \cdot \frac{-(x_i-\xi_i)}{|x-\xi|} = \frac{1}{n\alpha(n)|x-\xi|^{n-1}},$$

从而

$$\int_{\partial B} \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x;\xi)\phi(x)\mathrm{d}S(x) = \int_{\partial B} \phi(x)\frac{1}{n\alpha(n)|x-\xi|^{n-1}}\mathrm{d}S(x) = \fint_{\partial B} \phi(x)\mathrm{d}S(x) \to \phi(\xi).$$

而

$$\int_{\partial B} \Gamma(x;\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\mathrm{d}S(x) = \mathcal{O}\left(\|\nabla\phi\|_\infty \int_{\partial B} \Gamma(x;\xi)\mathrm{d}S(x)\right) = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon) & n=2 \\ \mathcal{O}(\varepsilon) & n\ge 3 \end{cases}$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x;\xi)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x = \phi(\xi), \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

□

【定理 3.3】 设 $\partial\Omega$ 分段光滑，$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$，则

$$u(\xi) = -\int_\Omega \Gamma(x;\xi)\Delta u(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x;\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n}(x;\xi)u(x)\right)\mathrm{d}S(x).$$

证明. 由分部积分公式

$$\int_\Omega \Gamma(x;\xi)\Delta u(x) - \Delta\Gamma(x;\xi)u(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x;\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n}(x;\xi)u(x)\right)\mathrm{d}S(x).$$

以及

$$\int_\Omega -\Delta\Gamma(x;\xi)u(x)\mathrm{d}x = u(\xi)$$

立即得到。 □

3.1.2 Green 函数

启发式讨论

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = \phi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

那么由上面的定理知

$$u(\xi) = -\int_\Omega \Gamma(x;\xi)\Delta u(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x;\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n}(x;\xi)u(x)\right)\mathrm{d}S(x).$$

现设 $g(x;\xi)$ 在 Ω 内满足 Laplace 方程，那么同理有

$$0=-\int_\Omega g(x;\xi)\Delta u(x)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(g(x;\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(x)-\frac{\partial g}{\partial n}(x;\xi)u(x)\right)\mathrm{d}S(x).$$

令

$$G(x;\xi)=\Gamma(x;\xi)+g(x;\xi),$$

那么

$$u(\xi)=-\int_\Omega G(x;\xi)\Delta u(x)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(G(x;\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(x)-\frac{\partial G}{\partial n}(x;\xi)u(x)\right)\mathrm{d}S(x).$$

在 Dirichlet 问题中，由于我们并不知道 $\partial u/\partial n$ 的值，我们希望选取 $g(x;\xi)$ 满足

$$G(x;\xi)|_{\partial\Omega}=0.$$

这样我们就有

$$u(\xi)=-\int_\Omega G(x;\xi)\Delta u(x)\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}(x;\xi)u(x)\mathrm{d}S(x).$$

上面所述的 G 称为 Green 函数，具体定义如下：

【定义 3.4】(Green 函数) 定义在 $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\setminus\{x=\xi\}$ 上的连续函数

$$G(x;\xi)=\Gamma(x;\xi)+g(x;\xi)$$

称为 Green 函数，若 $g(x;\xi)$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上二次连续可微，且 $G(x;\xi)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta_x G(x;\xi)=\delta(x-\xi)\\ G(x;\xi)|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

等价的

$$\begin{cases}-\Delta_x g(x;\xi)=0\\ g|_{\partial\Omega}=-\Gamma(x;\xi)|_{\partial\Omega}\end{cases}$$

Green 函数的性质

【命题 3.5】 当 $x\in\Omega\setminus\{\xi\}$ 时

$$\Delta_x G(x;\xi)=0.$$

当 $x\to\xi$ 时

$$G(x;\xi)\sim\Gamma(x;\xi).$$

证明. 显然。 □

【命题 3.6】 当 $x\in\Omega\setminus\{\xi\}$ 时

$$0<G(x;\xi)\le\frac{1}{2\pi}\log\frac{d}{|x-\xi|}.$$

其中 d 为 Ω 的直径。

证明. 首先注意到

$$G(x;\xi)=g(x;\xi)+\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-\xi|}=g(x;\xi)-\frac{1}{2\pi}\log d+\frac{1}{2\pi}\log\frac{d}{|x-\xi|}$$

那么在 Ω 上有

$$-\Delta_x\left(g(x;\xi)-\frac{1}{2\pi}\log d\right)=0$$

以及

$$g(x;\xi)-\frac{1}{2\pi}\log d\bigg|_{\partial\Omega}=G(x;\xi)-\frac{1}{2\pi}\log\frac{d}{|x-\xi|}\bigg|_{\partial\Omega}\le 0.$$

从而

$$g(x;\xi)-\frac{1}{2\pi}\log d\le 0\qquad\Longrightarrow\qquad G(x;\xi)\le\frac{1}{2\pi}\log\frac{d}{|x-\xi|}$$

另一方面，由于当 $x\to\xi$ 时

$$G(x;\xi)\sim\Gamma(x;\xi)(\to+\infty)$$

从而存在 ε 使得

$$G(x;\xi)>0,\qquad\forall\,x\in B(\xi,\varepsilon)\subset\Omega.$$

故在 $\Omega\setminus B(\xi,\varepsilon)$ 上有

$$-\Delta_xG(x;\xi)=0,\qquad G(x;\xi)|_{\partial\Omega}=0,\qquad G(x;\xi)|_{\partial B(\xi,\varepsilon)}>0$$

由强极值原理知 $G>0$。 □

【命题 3.7】 Green 函数具有对称性，即

$$G(x;\xi)=G(\xi;x)$$

证明. 定义函数

$$w(z)=G(z;\xi),\qquad v(z)=G(z;x)$$

那么

$$\Delta w(z)=0,\qquad\forall\,z\ne\xi$$
$$\Delta w(z)=0,\qquad\forall\,z\ne x$$

故存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$B(x,\varepsilon)\subset\Omega,\qquad B(\xi,\varepsilon)\subset\Omega,\qquad B(\xi,\varepsilon)\cap B(x,\varepsilon)=\varnothing.$$

在 $V=\Omega\setminus(B(x,\varepsilon)\cup B(\xi,\varepsilon))$ 上用 Green 公式有

$$0=\int_V v\Delta w-w\Delta v\mathrm{d}z=\int_{\partial V}v\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S(z).$$

即

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)}v\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_{\partial B(\xi,\varepsilon)}w\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得。 □

【命题 3.8】 $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}(x;\xi)\mathrm{d}S(x)=-1.$

证明. Dirichlet 边值问题中取 $u=1$，则 $f=0,\phi=1$。 □

3.1.3 特殊区域上的 Green 函数

【定义 3.9】 $\forall x \in \mathbb{R}^n$，称满足

$$\tilde{x} \cdot x = R^2$$

的点 $\tilde{x}$ 为 x 关于球面 $B(x, R)$ 的对称点。直接计算得

$$\tilde{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

【定理 3.10】(球面上的 Poisson 公式)

<u>**证明.**</u> 设 $\Phi(x) = \Gamma(x; 0)$ 为 Laplace 方程的基本解，那么

$$G(x;\xi) = \Gamma(x;\xi) - \Phi\left(\frac{|\xi|}{a}(x - \tilde{\xi})\right)$$

为格林函数。事实上只需注意到对于任意的 $x \in \partial B(0, a)$，即 $|x| = a$ 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{|\xi|}{a}(x-\tilde{\xi})\right|^2 &= \left(\frac{|\xi|}{a}(x-\tilde{\xi}), \frac{|\xi|}{a}(x-\tilde{\xi})\right) = \frac{|\xi|^2}{a^2}\left(x^2 - 2\frac{a^2}{|\xi|^2} x \cdot \xi + \frac{a^4}{|\xi|^2}\right) \\ &= \left(|\xi|^2 - 2x \cdot \xi + |x|^2\right) = |x - \xi|^2.\end{aligned}$$

以及

$$-\Delta\Phi\left(\frac{|\xi|}{a}(x - \tilde{\xi})\right) = \delta(x - \tilde{\xi}).$$

那么计算得

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G(x;\xi) = \frac{-1}{n\alpha(n)}\left(\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^n} - \frac{x_i - a^2\xi/|\xi|^2}{\left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{n-2}\left|x - \frac{a^2}{|\xi|^2}\xi\right|^n}\right)$$

进一步对于 $x \in \partial B(0, a)$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{x_i}{a} = \frac{1}{an\alpha(n)}\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i\xi_i - x_i^2 + \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^2\left(x_i^2 - \frac{a^2}{|\xi|^2}\xi_i x_i\right)}{|x-\xi|^n}\right) = \frac{a^2 - |\xi|^2}{n\alpha(n)a}\frac{1}{|x-\xi|^n}$$

从而若 $f = 0$，解为

$$u(\xi) = \frac{a^2 - |\xi|^2}{an\alpha(n)}\int_{|x|=a}\frac{\phi(x)}{|x-\xi|^n}\mathrm{d}S(x).$$

□

【推论 3.11】 若 $n = 2$，则解可用极坐标表示为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}\phi(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{3.1}$$

证明. 取 $n=2$，

$$\xi=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),\qquad x=(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$$

那么

$$\begin{aligned}|x-\xi|^2&=(\rho\cos\theta-r\cos\alpha)^2+(\rho\sin\theta-r\sin\alpha)^2\\&=r^2+\rho^2-2r\rho\,(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\end{aligned}$$

有

$$u(\rho,\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\alpha)}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\mathrm{d}\alpha.$$

□

【定理 3.12】 若 $\phi\in\mathcal{C}(\partial B)$，$f=0$，那么方程3.1确实是解。

【注 3.13】 对于给定的 r,ρ 称

$$\mathcal{P}_r(\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta)}$$

为 Poisson Kernel。这部分的想法可以归结为对一个函数的恒等逼近，具体可以参考文献 [5] 的 8.2 节。而对于一维情况，可以参考文献 [3] 的第二章，他引入了 Good kernel 的概念来证明恒等逼近。事实上可以证明 Poisson Kernel 是 Good Kernel。

3.2 极值原理

3.2.1 极值原理

在 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开区域 Ω 上考虑比 Poisson 方程更一般的方程

$$Lu=-\Delta u+c(x)u=f(x).$$

其中

$$c(x)\geq 0,\qquad\forall\,x\in\Omega.$$

【引理 3.14】 设 $c(x)\geq 0$，函数 $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 且在 Ω 内满足 $Lu=f<0$，那么 u 不能在 Ω 内达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值。

证明. 反设 u 在 Ω 内 x_0 处达到它的非负最大值，即

$$u(x_0)=M=\max_{x\in\overline{\Omega}}u(x)\geq 0.$$

那么

$$\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right|_{x_0}\leq 0,\qquad c(x_0)u(x_0)\geq 0\qquad\Longrightarrow\qquad Lu|_{x_0}\geq 0.$$

矛盾。 □

【定理 3.15】(弱极值原理) 设 $c(x)\geq 0$ 且在 Ω 上有界，$u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 且在 Ω 内满足 $Lu=f\leq 0$，则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值必在 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\sup_{x\in\Omega} u(x)\leq \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x).$$

证明. $\forall\,\varepsilon>0$，设

$$v(x)=u(x)+\varepsilon e^{ax_1}$$

其中 $a>0$ 待定。那么

$$Lv=Lu+L\left(\varepsilon e^{ax_1}\right)=f+\varepsilon\left(c(x)-a^2\right)e^{ax_1}\leq f+\varepsilon(C-a^2)e^{ax_1}$$

其中 $C=\sup c(x)$。取 $a=\sqrt{C+1}$，则

$$Lv<0$$

从而由引理知

$$\sup_{\Omega} u\leq\sup_{\Omega} v\leq\sup_{\partial\Omega} v^+\leq\sup_{\partial\Omega} u+\varepsilon\sup_{\partial\Omega} e^{ax_1}.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得。 □

【定理 3.16】(边界点引理) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是一个球，在 S 上 $c(x)\geq 0$ 且有界。若 $u\in\mathcal{C}^1(S)\cap\mathcal{C}^2(S)$ 且满足条件

1. $Lu\leq 0$
2. 存在 $x^0\in\partial S, u\left(x^0\right)\geq 0$ 且当 $x\in S$ 时 $u(x)<u(x^0)$

则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{x=x^0}>0.$$

其中 ν 与 ∂S 在点 x^0 的单位外法向 n 的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$。

证明. 不妨设 $S=\{x:|x|<r\}$。在球壳

$$S^*=\{x:r/2<|x|<r\}$$

上考虑辅助函数

$$w(x)=u(x)-u(x^0)+\varepsilon v(x)$$

其中

$$v(x)=e^{-a|x|^2}-e^{-ar^2}.$$

a,ε 待定。

直接计算得

$$\begin{aligned}Lv&=\left(2an-4a^2|x|^2+c(x)\right)e^{-a|x|^2}-c(x)e^{-ar^2}\\&\leq(-a^2r^2+2an+C)e^{-a|x|^2}\end{aligned}$$

其中 $C=\sup c(x)$。进一步有

$$Lw \le Lu + Lv \le (-a^2r^2+2an+C)e^{-a|x|^2}$$

从而可以取 a 充分大使得 $Lw<0$。那么由之前的引理得，w 的非负最大值必在边界处达到。而

$$\partial S^* = \partial B\left(0,\frac{r}{2}\right)\cup \partial S = \partial B \cup \partial S.$$

因此我们对两部分分别讨论。

对于 ∂B，由于 u 在其上连续而 ∂B 紧，从而可以达到其最值。再结合条件 2 有

$$\beta = \min_{x\in\partial B}(u(x^0)-u(x)) \ge 0.$$

从而

$$w(x) \le -\beta + \varepsilon\left(\exp\left(-\frac{ar^2}{4}\right)-\exp\left(-ar^2\right)\right),\qquad \forall\, x\in\partial B.$$

可以选取充分小的 ε 使得

$$w(x)<0,\qquad x\in\partial B.$$

对于 ∂S，由于

$$w(x)\ge 0,\qquad w(x^0)=0.$$

综上 w 在 x^0 处取得非负最小值，从而

$$0\le \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{x_0} \le \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_0} + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{x_0}$$

结合

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{x_0} = -2ar^2e^{-ar^2}.$$

知命题成立。 □

【定理 3.17】(强极值原理) 设 Ω 时有界连通开区域，在 Ω 上 $c(x)\ge 0$ 且有界，$u\in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ 并满足 $Lu\le 0$，若 u 在 Ω 内部达到非负最大值，则 u 恒为常数。

证明. 记 $M=\max_{\overline{\Omega}} u(x)\ge 0$. 考虑集合

$$E=\{x: u(x)=M\}=u^{-1}(\{M\}).$$

显然 E 非空，并且由 u 连续知 E 是闭集。

$\forall\, x^0\in E$，存在 $r>0$ 使得

$$B(x^0,2r)\subset\Omega.$$

断言 x_0 为 E 的内点。若不然存在 $\overline{x}$ 使得

$$\overline{x}\in(\Omega\setminus E)\cap B(x^0,r)$$

记

$$d=\mathrm{dist}(\overline{x},E),$$

那么

$$B(\overline{x},d)\subset B(x^0,2r)\subset\Omega.$$

取 $y\in B(\overline{x},d)\cap E$，那么 y 是 $u(x)$ 在 $B(\overline{x},d)$ 上的极值点，并且由 y 也是 Ω 的内点知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_y=0,\qquad 0\le i\le n.$$

但将边界点引理应用到 $B(\overline{x},d)$ 上知，存在一个方向 ν 使得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_y>0$$

矛盾。 □

3.2.2 边值问题解的最大模估计

考虑 n 维位势方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x) & x\in\Omega\\ u=\phi(x) & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

【定理 3.18】 设 $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 的解，则

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\le\Phi+CF.$$

其中

$$\Phi=\max_{\partial\Omega}|\phi(x)|,\qquad F=\sup_{\Omega}|f(x)|.$$

C 仅依赖于维数 n 与 Ω 直径。

3.2.3 能量模估计

先来考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u+c(x)u=f(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

【定理 3.19】 设 $c(x)\ge c_0>0$ 且 $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 的解，那么有

$$\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{c_0}{2}\int_\Omega|u(x)|^2\mathrm{d}x\le M\int_\Omega|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

证明. 在等式

$$-\Delta u+c(x)u=f(x)$$

两侧乘 u 并积分得

$$\int_\Omega f(x)u(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega-u(x)\Delta u(x)+c(x)u^2(x)\ge\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+c\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$$

并结合

$$uf \leq \frac{1}{2c_0}f + \frac{c_0}{2}u$$

即得。 □

【注 3.20】 上述估计可以借助 Poincare 不等式推广到 $c(x)=0$ 的情况。

【定理 3.21】(Poincare 不等式) 设 $u \in H_0^1(\Omega)$，那么

$$\|u\|_2 \leq 2d\|\nabla u\|_2.$$

其中 $d = \mathrm{diam}(\Omega)$.

【定理 3.22】 设 $c(x) \geq 0$ 且 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 的解，其中 Ω 是有界开区域。那么有

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq M \int_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

其中 M 只依赖于 Ω 的直径。

证明. 在等式 $-\Delta u + cu = f$ 两侧乘 u 并分部积分得

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + cu^2 \mathrm{d}x = \int fu \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2a^2}\int f^2 \mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}\int u^2 \mathrm{d}x \leq a^2 d \int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

取 $a^2 = 1/(2d)$ 得

$$\int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq d \int f^2 \mathrm{d}x.$$

□

3.3 调和函数的性质

【定义 3.23】 设 $u : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ 并且满足

$$-\Delta u = 0$$

则称 u 为调和函数。

3.3.1 平均值公式

【定理 3.24】(平均值公式) 设 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ 为调和函数，那么对于任意的 $B(x,r) \subset \Omega$ 有

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \mathrm{d}S = \fint_{B(x,r)} u \mathrm{d}y.$$

证明. 令

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz) \mathrm{d}S(z).$$

那么

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z\mathrm{d}S(z) = \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\mathrm{d}S(y)$$
$$= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = 0.$$

这说明 ϕ 是一个常值函数，从而令 $r\to 0$ 有

$$\fint_{\partial B(x,r)} u\mathrm{d}S = \lim_{r\to 0^+}\fint_{\partial B(x,r)} u\mathrm{d}S = u(x).$$

又由上式有

$$\int_{\partial B(x,r)} u\mathrm{d}S = n\alpha(n)r^{n-1}u(x)$$

两侧对 r 积分即得

$$\int_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y = \alpha(n)r^n u(x).$$

□

【定理 3.25】 设 $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ 满足对于任意的 $B(x,r)\subset\Omega$ 有

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y),$$

那么 u 是调和函数。

证明. 由上一个定理的证明过程知

$$\phi'(r) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y.$$

而

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y),$$

说明 $\phi' = 0$ 从而

$$\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = 0.$$

令 r 趋于 0 即得。 □

事实上调和函数均是无穷次可微的，因此上述定理可减弱为 $u\in\mathcal{C}(\Omega)$。

【定理 3.26】 设 $u\in\mathcal{C}(\Omega)$ 满足对于任意的 $B(x,r)\subset\Omega$ 有

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y),$$

那么 $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 且 u 是调和函数。

证明. 记

$$\Omega_\varepsilon = \{x\in\Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

在 Ω_ε 上令 $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$，其中 $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，$\eta$ 为光滑子。那么 u_ε 无穷次可微，并且

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r = \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)n\alpha(n)r^{n-1}\mathrm{d}r \\ &= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon \mathrm{d}y = u(x). \end{aligned}$$

□

3.3.2 Harnack 不等式

【定理 3.27】 对于任意的连通开集 $V \subset\subset \Omega$，存在仅依赖于 V 的常数 $C > 0$，使得对于任意的非负调和函数而言，有

$$\sup_V u \le C \inf_V u.$$

<u>**证明.**</u> 只需证明存在 $C > 0$ 使得

$$\frac{1}{C}u(y) \le u(x) \le Cu(y), \qquad \forall\, x, y \in V.$$

记

$$r = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(V, \partial\Omega),$$

那么对于任意的 $x \in V$

$$y \in B(x,r) \cap V \qquad \Longrightarrow \qquad B(y,r) \subset B(x,2r) \subset U.$$

此时有

$$u(x) = \fint_{B(x,2r)} u(z)\mathrm{d}z \ge \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n}\int_{B(y,r)} u(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2^n}\fint_{B(y,r)} u\mathrm{d}z = \frac{1}{2^n}u(y).$$

又由于 $\overline{V}$ 是连通的紧集，从而存在 $\{B_j\}_{j=1}^n$ 是半径为 $r/2$ 的球，满足

$$V \subset \bigcup_{i=1}^n B_i, \qquad B_i \cap B_{i-1} \ne \varnothing.$$

从而

$$u(x) \ge \frac{1}{2^{n(N+1)}}u(y), \qquad \forall\, x, y \in V.$$

□

【定理 3.28】 对于任意的 $0 < r < R$，在上述定理中令 $\Omega = B(x,R), V = B(x,r)$，$C$ 有更好的估计

$$C = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

证明. 在 Ω 中的调和函数 u 可看成下述 Dirichlet 问题的解

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

解为

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \mathrm{d}S(y).$$

注意到

$$R - |x| \leq |x-y| \leq R + |x|.$$

从而

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{(R-|x|)^n} \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} R^{n-2} \fint_{\partial B(0,R)} u(y)\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0) \end{aligned}$$

同理

$$u(x) \geq \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0).$$

即

$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0)$$

由于上述不等式对任意的 $x \in V$ 均成立，从而

$$\frac{R-|x|}{R+|y|} \cdot \left(\frac{R-|y|}{R+|x|}\right)^{n-1} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq \frac{R+|x|}{R-|y|} \left(\frac{R+|y|}{R-|x|}\right)^{n-1}$$

进而

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^n \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

□

3.3.3 强极值原理

【定理 3.29】 设 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 是一个调和函数，那么

1.
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. 若 U 连通，那么
$$\exists\, x_0 \in \Omega,\ u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u, \forall\, u \in \Omega.$$

证明. 只需证明第一个即可。记

$$M=\max_{\overline{\Omega}} u.$$

若 $x_0\in\Omega$ 使得 $u(x_0)=M$，设 $x_0\in\Omega_1$，其中 Ω_1 是 Ω 的一个连通分枝，那么 $\forall\, x_1\in\Omega_1$，存在连续函数

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\Omega_1$$

满足

$$\gamma(0)=x_0,\qquad \gamma(1)=x_1.$$

记

$$\ell=\sup\{t\in[0,1]:u\circ\gamma(t)=M\}.$$

由于 $\gamma(0)=x_0$，因此 $\ell\in[0,1]$。反设 $\ell<1$，记 $x_\ell=\gamma(\ell)$，那么由 γ 连续知

$$u(x_\ell)=u\circ\gamma(\ell)=M.$$

x_ℓ 是 Ω 的内点，从而存在 $r>0$ 使得 $B(x_\ell,r)\subset\Omega$，从而

$$M=\fint_{B(x_\ell,r)}u\mathrm{d}y\qquad\Longrightarrow\qquad u=M,\ \forall\, x\in B(x_\ell,r)$$

而由 γ 连续知，存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$(-\varepsilon+\ell,\varepsilon+\ell)\subset\gamma^{-1}\left(B(x_\ell,r)\right),\qquad\Longrightarrow\qquad \ell+\frac{\varepsilon}{2}\in\{t\in[0,1]:u\circ\gamma(t)=M\}.$$

这与 ℓ 为上确界矛盾。再结合 x_1 的任意性知命题成立。 □

3.3.4 局部估计

【定理 3.30】 设 u 为 Ω 上的调和函数，那么 $\forall\, B(x_0,r)\subset\Omega$ 有

$$|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

其中

$$C_0=\frac{1}{\alpha(n)},\qquad c_k=\frac{\left(2^{n+1}kn\right)^k}{\alpha(n)}.$$

【定理 3.31】(解析性) 若 u 为 Ω 上的调和函数，那么 u 在 Ω 上处处解析。

【定理 3.32】(Liouville 定理) 设 u 为 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，那么 u 是一个常值函数。

参考文献

[1] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces, and Partial Differential Equations.* New York: Springer.

[2] Stein, E. M. (2005). *Real Analysis.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

[3] Stein, E. M. (1993). *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press.

[4] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis (2nd ed.).* McGraw-Hill.

[5] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley.

[6] Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations (2nd ed.).* American Mathematical Society.

[7] 姜礼尚，陈亚浙. 1996. *数学物理方程讲义 (第 2 版).* 北京: 高等教育出版社

[8] 谷超豪，李大潜等. 2002. *数学物理方程*，北京: 高等教育出版社

[9] 陈才生等. 2002. *数学物理方程*. 南京: 东南大学出版社