PDE 第一章作业

yjyxbhsx

2024 年 12 月 16 日

【题目 1】 利用 Gauss-Green 公式证明:

1. 如果 $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，则
$$\int_\Omega u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v n_i \,\mathrm{d}S.$$
2. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，则
$$\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$
3. 如果 $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，则
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$
4. 如果 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，则
$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

<u>**Proof.**</u> 回忆 Gauss-Green 公式为
$$\int_\Omega w_{x_i} \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} w n_i \,\mathrm{d}S. \tag{1}$$
其中 $n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{R}^d$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向。

1. 在式1中令 $w = uv$ 并注意到
$$(uv)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}$$
即可。
2. $$\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \sum \int_\Omega (u_{x_i})_{x_i} \,\mathrm{d}x = \sum \int_{\partial\Omega} u_{x_i} n_i \,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$
3. 利用第 1 小问的公式:
$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x &= \sum \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} \,\mathrm{d}x = \sum \left(-\int_\Omega u (v_{x_i})_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} n_i \,\mathrm{d}S \right) \\ &= -\int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot n \,\mathrm{d}S = -\int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$
4. 利用第 3 问公式有
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$
$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\Delta u \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$
两式相减即得。

□

【题目 2】 求解变分问题：求 $u \in M = \{y \in C^1[0,1] : y(1) = 0\}$ 使得

$$J(u) = \min_{y \in M} J(y),$$

其中

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x - y(0).$$

Solution. 设 $u \in M$ 是变分问题的解，任意给定 $\phi \in M$ 且 $\phi \neq 0$，则

$$u + \varepsilon\phi \in M, \qquad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

考虑函数

$$j(\varepsilon) = J(u+\varepsilon\phi) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u' + \varepsilon\phi')^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (u+\varepsilon\phi)\,\mathrm{d}x - u(0) - \varepsilon\phi(0).$$

由于 u 是变分问题的解，而 $u + \varepsilon\phi \in M$，故必有

$$j(0) = J(u) = \min_{v \in M} J(v) \le J(u+\varepsilon\phi) = j(\varepsilon).$$

即 0 是 j 的最小值点，当然也是极小值点。故此时满足

$$j'(0) = 0, \qquad j''(0) > 0$$

我们对 j 求导有

$$j'(\varepsilon) = \int_0^1 u'\phi' + \varepsilon(\phi')^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \phi\,\mathrm{d}x - \phi(0), \qquad j''(\varepsilon) = \int_0^1 (\phi')^2\,\mathrm{d}x.$$

从而 $j''(0)$ 确实大于 0，我们令 $j'(0) = 0$ 并分部积分：

$$0 = j'(0) = \int_0^1 u'\phi'\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \phi\,\mathrm{d}x - \phi(0) = -\int_0^1 (u''+2)\phi\,\mathrm{d}x - (1+u'(0))\phi(0).$$

即

$$-\int_0^1 (u''+2)\phi\,\mathrm{d}x - (1+u'(0))\phi(0) = 0, \qquad \forall\, \phi \in M. \tag{2}$$

由于 $\phi \in M$ 是任意选取的，且 $C_0^\infty[0,1] \subset M$，故

$$\int_0^1 (u''+2)\phi\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty[0,1].$$

(注意 $\phi \in C_0^\infty[0,1]$ 隐含 $\phi(0) = \phi(1) = 0$)。故根据课本引理 2.1 有

$$u''(x) + 2 = 0, \qquad x \in [0,1].$$

将这个结果带回2中有

$$(1+u'(0))\phi(0) = 0, \qquad \forall\, \phi \in M.$$

由 ϕ 的任意性立即得到

$$1 + u'(0) = 0$$

再结合 $u \in M = \{y \in C^1[0,1] : y(1) = 0\}$ 知

$$u(1) = 0.$$

综上，我们得到了 u 满足的微分方程：

$$\begin{cases} u'' + 2 = 0 \\ u'(0) = -1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

解这个 ODE 得

$$u(x) = -x^2 - x + 2.$$

□

【题目 3】 求 $u \in M = C^1[0,1]$，使得

$$J(u) = \min_{y \in M} J(y),$$

其中

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(y^2(0) + y^2(1)\right) - 2y(0)$$

Solution. 设 $u \in M$ 是变分问题的解，任意给定 $\phi \in M$ 且 $\phi \neq 0$，则

$$u + \varepsilon\phi \in M, \qquad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

考虑函数

$$j(\varepsilon) = J(u + \varepsilon\phi)$$

同理令 $j'(0) = 0$ 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 u'\phi' + u\phi\,\mathrm{d}x + u(0)\phi(0) + u(1)\phi(1) - \phi(0) \\ &= \int_0^1 (-u'' + u)\phi\,\mathrm{d}x + \phi(0)(u(0) - u'(0) - 2) + \phi(1)(u(1) + u'(1)) \end{aligned}$$

以及

$$j''(0) = \int_0^1 \left(\phi'^2 + \phi^2\right)\,\mathrm{d}x > 0.$$

与上一题同理，由 ϕ 的任意性，我们可以得到关于 u 的一个 ODE：

$$\begin{cases} -u'' + u = 0 \\ u(0) - u'(0) - 2 = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

解得

$$u(x) = e^{-x}.$$

□

【题目 4】 设

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x)v^2\,\mathrm{d}s - \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} gv\,\mathrm{d}s.$$

其中 $\alpha(x) \geq 0$，考虑下面三个问题：

I. 求 $u \in M = C^1(\overline{\Omega})$ 使得

$$J(u) = \min_{v \in M} J(v).$$

II. 求 $u \in M$ 使得

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv - fv)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\alpha(x)uv - gv)\ \mathrm{d}s = 0, \qquad v \in M.$$

III. 求 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 满足以下边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. 证明问题 I 与问题 II 等价；
2. 当 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 时，问题 I , II , III 等价。

Proof.

1. 对于任意给定的 $v \in M, v \neq 0$ 而言，记

$$j(\varepsilon) = J(u + \varepsilon v), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

求导得

$$j'(0) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv - fv)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\alpha(x)uv - gv)\ \mathrm{d}s$$

而

$$j''(0) = \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)v^2\, \mathrm{d}s > 0.$$

故

$$\mathrm{II} \iff j'(0) = 0 \iff \mathrm{I}.$$

2. 由 Green 公式，II 等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv - fv)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\alpha(x)uv - gv)\ \mathrm{d}s \\ &= \int_\Omega (-\Delta u + u - f)\, v\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u - g\right) v\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

与题目三同理，我们运用 v 的任意性，上式等价于 III。

□

【题目 5】

1. 证明在自变量替换

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

下，波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 具有形式

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

并由此求出波动方程的通解。

2. 证明在自变量替换

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \tau = t \end{cases}$$

下，波动方程 $u_t + au_x = a^2 u_{xx}$ 具有形式

$$u_\tau = a^2 u_{\xi\xi}.$$

Proof.

1. 直接计算得

$$\partial_t = -a\partial_\xi + a\partial_\eta, \qquad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta.$$

   故

$$\partial_{tt} - a^2\partial_{xx} = (\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x) = -4a^2\partial_{\xi\eta}.$$

   从而波动方程等价于

$$u_{\xi\eta} = 0 \qquad \Longrightarrow u\left(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\right) = F(\xi) + G(\eta) \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,t) = F(x-at) + G(x+at).$$

2. 直接计算得

$$\partial_x = \partial_\xi, \qquad \partial_t = -a\partial_\xi + \partial_\tau$$

   从而

$$\partial_t + a\partial_x - a^2\partial_{xx} = -a\partial_\xi + \partial_\tau + a\partial_\xi - a^2\partial_{\xi\xi} = \partial_\tau - a^2\partial_{\xi\xi}.$$

□

【题目 6】 若 u 是 $\Delta u = 0$ 的解，且 $u(x)$ 只是向径 $r = |x|$ 的函数，即 $u(x) = v(|x|)$，写出 v 适合的 ODE。

Solution. 直接计算：

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial |x|}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}|x|} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x_i}{|x|}$$

$$\partial_{ii} u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x_i}{|x|}\right) = \frac{x_i^2}{|x|^2}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}\right) = \frac{x_i^2}{|x|^2}v'' + v'\cdot\frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}.$$

从而

$$\Delta u = \sum \partial_{ii} u = \sum\left(\frac{x_i^2}{|x|^2}v'' + v'\cdot\frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}\right) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

□

【题目 7】 讨论方程

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x, y, u_x, u_y)$$

的分类。

Solution.

- $AC > B^2, A + C < 0$：椭圆
- $AC = B^2, A + C < 0$：抛物
- $AC < B^2$：双曲

□